

# مدل سازی و شبیه سازی ستون استخراج ضربه ای سینی دار به همراه موازنه جمعیت قطرها

احمد قائمی\*<sup>+</sup>، سید هادی حسینی

دانشکده مهندسی شیمی، نفت و گاز، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

**چکیده:** در این پژوهش از یک مدل دقیق فیلمی با در نظر گرفتن اختلاط پیش رو برای پیش بینی رفتار انتقال جرمی ستون استخراج سینی دار ضربه ای استفاده شده است. برای توصیف هیدرودینامیک ستون از مدل پایای موازنه جمعیت استفاده شد. معادله های مدل سازی شامل معادله های قطره های فاز پراکنده و معادله های دیفرانسیل پاره ای بوده که به طور هم زمان با استفاده از روش های خطها و تفاضل مرکزی حل شدند. سامانه ی مورد بررسی در این پژوهش آب - اتیل استات بود. قطر میانگین و توزیع اندازه قطرها در دو حالت حجمی با استفاده از مدل توسعه یافته محاسبه شدند. نتیجه های شبیه سازی با داده های تجربی مورد ارزیابی قرار گرفتند. مقایسه نتیجه ها نشان داد که قطر میانگین قطره های دارای ۰/۶۵٪ خطا نسبت به داده های تجربی داشته در حالی که خطای رابطه نیمه تجربی ۸/۳۶٪ می باشد. مدل سازی دقیق ستون با اعمال تغییرهای اندازه قطرها توسط موازنه جمعیت قطرها در طول ستون استخراج نشان داد که مدل توافق خوبی با داده های تجربی دارد.

**واژه های کلیدی:** استخراج مایع - مایع؛ ستون سینی دار ضربه ای؛ موازنه جمعیت؛ مدل سازی؛ شبیه سازی.

**KEYWORDS:** Liquid-liquid Extraction; Pulsed sieve-plate column; Population balance; Modeling; Simulation.

## مقدمه

غیرقابل حل شود. طراحی استخراج کننده های با جریان های رو در رو خیلی پیچیده است. این پیچیدگی از آن جا ناشی می شود که نرخ انتقال جرم در دستگاه های مایع - مایع خیلی کم تر از دستگاه های گاز - مایع می باشد و در نتیجه تعداد معدودی حالت نظری در برج های استخراج شناسایی شده که تشکیل قطره در درون برج فقط تحت تأثیر نیروهای شناوری انجام گیرد. به منظور افزایش انتقال جرم، انرژی مکانیکی به فرم هم زدگی تحمیلی، ضربه ای و یا هم زدگی با دیسک چرخان به سامانه افزوده می شود که این عمل به آشفستگی بیش تر در سطح تماس و سطح انتقال جرم بزرگ تر به خاطر اندازه قطره های کوچک تر منجر می شود.

فرایند استخراج حلالی یکی از مهم ترین فرایندهای جداسازی است که در برای خالص سازی بیش تر، مواد حساس به دما، در صنایع دارویی، صنایع هسته ای و غیره به کار می رود [۱]. با توجه به سرعت انتقال جرم اجزاء بین فازها باعث به وجود آمدن رژیم های انتقال جرمی می شود. متناسب هر نوع رژیم انتقال جرمی باید تماس دهنده مناسبی انتخاب شود. با توجه به انواع استخراج کننده های مایع-مایع انتخاب یکی از این دستگاه ها به عنوان استخراج کننده تصمیم پیچیده ای است، که حتی با انتخاب دستگاه، مدل سازی آن ها توسط نرم افزار و در نظر گرفتن فرضیه های مناسب برای ساده سازی حل نیز می تواند پیچیده و حتی

\*عهدہ دار مکاتبات

+E-mail: aghaemi@iust.ac.ir

هیدرودینامیک ستون استخراجی تغییر کرده و در نتیجه در انتقال جرم ستون تأثیر می‌گذارد. متأسفانه در مدل‌سازی و شبیه‌سازی این تغییرهای اعمال نشده و اندازه قطره‌ها در طول ثابت فرض شده و باعث کاهش دقت مدل‌سازی و شبیه‌سازی می‌شود. بنابراین در این پژوهش با مطالعه مدل‌های ارائه شده، یک مدل پایای موازنه جمعیت برای شبیه‌سازی هیدرودینامیکی ستون استخراج ضربه‌ای سینی‌دار با در نظر گرفتن اثرهای شکست و ائتلاف قطره‌ها به صورت هم‌زمان و همچنین به همراه اثرهای جابه‌جایی فاز پراکنده، ارائه شده است. در ادامه برای توصیف رفتار انتقال جرمی ستون استخراجی هم‌زمان یک مدل دینامیکی غیرتعدالی مبتنی بر سرعت استفاده شده است. استفاده هم‌زمان از این دو مدل باعث افزایش دقت مدل‌سازی شده و رفتار فرایند با دقت بالاتری پیش‌بینی می‌شود. برای ارزیابی نتیجه‌های مدل، سامانه آب-اتیل استات در یک ستون سینی‌دار شبیه‌سازی شده است. نتیجه‌های شبیه‌سازی فرایند موردنظر با داده‌های تجربی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

### بخش نظری

#### مروری بر مدل‌های فرایندهای استخراج مایع - مایع

با توسعه و پیشرفت فرایندهای استخراج مایع-مایع و همچنین ساخت استخراج‌کننده‌ای متنوع به دلیل کاربردهای گوناگون این فرایند در صنایع گوناگون و همچنین برای افزایش کارایی استخراج‌کننده‌ها، روش‌ها و فن‌های مدل‌سازی این فرایندها نیز توسعه یافته است. نزدیک به دو دهه هست که مدل‌سازی فرایندهای استخراج صورت می‌پذیرد. این مدل‌ها شامل مدل‌های کلی فرایند شامل مدل‌های ایده‌آل و غیر ایده‌آل، مدل‌ها و رابطه‌ها برای پارامترهای انتقال جرمی و هیدرودینامیک می‌باشند. وینستن<sup>(۶)</sup> و همکاران [۱۱]، باستانی [۱۲]، تانگ<sup>(۷)</sup> و همکاران [۱۳]، مجلی<sup>(۸)</sup> و همکاران [۱۴]، اتونی و همکاران [۱۵]، مورالس<sup>(۹)</sup> و همکاران [۱۶]، مارتونوس<sup>(۱۰)</sup> و همکاران [۱۷] و اتونیو الریفیعی<sup>(۱۱)</sup> [۱۸] مدل‌های انتقال جرمی غیر ایده‌آل را توسعه داده‌اند. این مدل‌ها،

همچنین انرژی فزون انعطاف بیشتری در عملیات برج می‌دهد. در نتیجه این باعث پیچیدگی در طراحی ستون استخراج می‌شود. همچنین رفتار این فرایند خیلی غیرخطی بوده و با زمان به صورت دینامیکی تغییر می‌کند [۵ - ۱].

ستون‌های استخراج ضربه‌ای سینی‌دار، دارای توان عملیاتی و بازده جداسازی بالایی می‌باشند که این امر باعث کاربرد فراوان این ستون‌ها در گستره گسترده‌ای از صنایع به ویژه صنایع شیمیایی و هسته‌ای شده است. برای طراحی دقیق و بهینه‌سازی یک استخراج‌کننده، هیدرودینامیک و انتقال جرم آن باید به خوبی شناخته شده باشد. در یک ستون استخراج ضربه‌ای سینی‌دار، فاز پراکنده به صورت پیوسته دچار تغییرهایی مانند شکست و ائتلاف در طی فرایند می‌شود. شکست و ائتلاف قطره‌ها اثرهای شدیدی بر روی اندازه قطره، توزیع اندازه قطره و ماندگی فاز پراکنده دارد که هرکدام از این پارامترها بر روی بازده انتقال جرم تأثیر دارند. برای توصیف واقعی و بهتر رفتار قطره‌ها، مدل موازنه جمعیت در دهه ۱۹۶۰ میلادی توسعه یافت. گارگ<sup>(۱)</sup> و پرت [۶]، موهانتی<sup>(۲)</sup> و وگلپل [۷] و الخانی و همکاران [۸] برای پیش‌بینی هیدرودینامیک ستون استخراج ضربه‌ای سینی‌دار از مدل موازنه جمعیت استفاده کردند. هاورلند و همکاران<sup>(۳)</sup> [۹] و لو و همکاران<sup>(۴)</sup> [۱۰] مدل موازنه جمعیت را در حالت پایا برای ستون استخراج ضربه‌ای سینی‌دار مورد استفاده قرار دادند. آن‌ها اثرهای ائتلاف قطره‌ها را در برابر اثرهای شکست قطره‌ها صرف‌نظر کردند. در بیش‌تر کارهای صورت گرفته فرض شده که قطره مادر تنها به دو قطره فرزند شکسته می‌شود. ال‌خانی و همکاران [۸] مدل موازنه جمعیت در حالت پایا و دینامیک را با فرض این که قطره مادر به سه قطره فرزند شکسته می‌شود، برای ستون استخراج ضربه‌ای سینی‌دار به کار بردند. جامع‌ترین و مهم‌ترین پژوهش‌ها در مدل موازنه جمعیت برای ستون‌های گوناگون استخراج توسط کازاماتا و همکاران<sup>(۵)</sup> انجام شده است.

بررسی و مطالعه پژوهش‌های صورت گرفته نشان می‌دهد که در طول ستون به علت شکست و ائتلاف قطره‌های فاز پراکنده

(۱) Garg and Pratt

(۲) Mohanty and Vogelpohl

(۳) Haverland et al.

(۴) Luo et al.

(۵) Casamatta et al.

(۶) Weinstein et al.

(۷) Tang et. al

(۸) Mjalli

(۹) Morales

(۱۰) Martunus et al.

(۱۱) El-Rifai and Ettouney

جدول ۱- ویژگی های مدل های استخراج مایع - مایع.

مشخصات و ویژگی ها	سال	مرجع	مدل
توصیف هیدرودینامیک و انتقال جرم در جریان ناهم سو استخراج مایع-مایع	۱۹۹۸	[۱۱]	مدل وینستن و همکاران
مدل مرحله ای همراه با اختلاط پیشرو با در نظر گرفتن همبستگی و توزیع مجدد قطرات، پیش بینی کارایی ستون های دیسک چرخان	۲۰۰۴	[۱۲]	مدل باستانی
مدل دینامیکی انتقال جرم، با در نظر گرفتن اثرات اختلاط پیشرو ناشی از توزیع اندازه ذرات و اختلاط محوری در ستون استخراج سینی دار	۲۰۰۴	[۱۳]	مدل تانگ و همکاران
ستون استخراج شیبیل برای تغییرات غلظت و روش های کنترل غلظت	۲۰۰۵	[۱۴]	مدل مجلی و همکاران
ستون استخراج همزن دار همراه با واکنش شیمیایی در حالت پایا	۲۰۰۷	[۱۵]	مدل اتونی و همکاران
شبیه سازی برج های پر شده با ساختار منظم	۲۰۰۷	[۱۶]	مدل مورالس و همکاران
پیش بینی اثرات اختلاط پیشرو در برج های دیسک چرخان	۲۰۱۰	[۱۷]	مدل مارتونوس و همکاران
توصیف ستون استخراج سینی دار، خطی سازی روابط تعادل فازها	۲۰۱۱	[۱۸]	مدل اتونی و الرفیعی

مدل اتونی و الرفیعی تازه ترین مدل دینامیک برای توصیف ستون های استخراج سینی دار می باشد که با گرفتن لاپلاس از معادله های موازنه جرم معادله تفاضلی به دست می آید که با حل معادله تفاضلی تغییرهای غلظت به صورت پایا به دست می آید.

#### ارایه مدل توسعه یافته

##### مدل سازی قطره ها با موازنه جمعیت

در این پژوهش برای مدل سازی فرایند استخراج تغییرهای اندازه قطره ها و توزیع آن ها در نظر گرفته شده است. بنابراین افزون بر معادله های موازنه جرم اجزاء معادله های موازنه جمعیت قطره ها نیز ارایه شده است. ابتدا معادله های موازنه جمعیت ارایه شده و بعد معادله های موازنه جرم ارایه می شود. معادله اساسی موازنه جمعیت در حالت دینامیک که توسط *کازاماتا* و *وگلیل* ارایه شده است [۱۹]:

$$\frac{\partial P(z, d)}{\partial t} = - \frac{\partial [P(z, d) V_d(z, d)]}{\partial z} + \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ E_d(z) \frac{\partial P(z, d)}{\partial z} \right] + P(z, d)$$

که در آن،  $P(z, d)$  توزیع حجمی اندازه قطره ها،  $d$  قطر قطره و  $z$  ارتفاع در ستون می باشد.  $E_d(z)$  ضریب اختلاط محوری

توسعه یافته مدل های جریان غیر ایده آل و یا ترکیب آن ها بوده و پژوهشگران سعی کردند با کاهش فرضیه های کارایی مدل ها را افزایش دهند. برای بررسی بیش تر این مدل ها، ویژگی های آن ها در جدول ۱ آمده است. در مدل وینستن و همکاران با استفاده از معادله های موازنه جرم برای فاز پیوسته و پراکنده برای یک المان حجم انتخابی به صورت ناپایا و وابسته به زمان ارایه شد [۱۱]. در مدل باستانی شبیه سازی بر روی دو سامانه تولوئن - استن - آب و n-بوتانول - ساکسینیک اسید - آب انجام گرفته است [۱۲]، مدل تانگ و همکاران که حالت دینامیکی داشته و برای انتقال جرم، که اثرهای اختلاط پیشرو ناشی از توزیع اندازه ذره ها و اختلاط محوری در آن دیده شده، توسعه داده شده است [۱۳].

در مدل اتونی و همکاران ماده حل شونده با یک واکنش آرام همراه با واکنش دهنده های اضافی فاز پراکنده که غیر قابل امتزاج در فاز پیوسته بوده، انتقال می یابد. بنابراین سرعت واکنش متناسب با غلظت جسم حل شونده در فاز پراکنده می باشد [۱۵]. مدل مورالس و همکاران برای برج های منظم پر شده به صورت ناپایا توسعه داده شده است. آن ها برای ساده سازی بیش تر معادله ها از ضریب پراکنده محوری و از تغییرهای سرعت فازها صرف نظر کردند [۱۶]. مدل مارتونوس و همکاران به صورت پایا برای برج های دیسک چرخان توسعه داده شده است. سامانه ای مطالعه شده در این مدل آب - اسید استیک - کروزین بوده است [۱۷].

$$We_p(d) = \frac{\rho_c \varepsilon_m^{2/3} d^{5/3}}{\sigma} \quad (7)$$

$$\varepsilon_m \approx \frac{C_3 (Af)^3}{H_c} \quad (8)$$

$$C_3 = 5.82 \frac{(1-e)(1-e^2)}{e^2 C_4^2} \quad (9)$$

که  $C=0.395$  [۱۰] و  $C_4=0.61$  [۲۰]. طبق معادله ی (۷)، احتمال شکست قطره‌ها با قطر بزرگ‌تر، بیش‌تر می‌باشد. عبارت تولید به دلیل شکست نیز طبق معادله ی پایین تعریف می‌شود:

$$PB^+(z, d) = \int_d^{d_{max}} r(z, d_0) P(z, d_0) \beta(d_0, d) \partial d_0 \quad (10)$$

به طور معمول برای محاسبه توزیع اندازه قطره‌های فرزند، از تابع بتا استفاده می‌کنند. البته تابع بتا در عمل بسیار پیچیده می‌باشد. در این پژوهش از رابطه سوریس و تاوولا ریڈس<sup>(۱)</sup> [۲۱] برای محاسبه توزیع اندازه قطره‌های فرزند استفاده شده است. اساس این رابطه بر این فرض استوار است که اگر شکست قطره رخ دهد، انرژی ضربه تا جایی که امکان دارد جذب قطره می‌شود. سپس این انرژی به انرژی سطحی برای تبدیل به بهترین حالت ممکن مساحت بین سطحی تبدیل می‌شود. این بدان معنی است که احتمال تشکیل مساحت بین سطحی برای قطره‌های فرزندی که دارای توزیع اندازه قطره‌های بزرگ‌تری دارند، بیش‌تر می‌باشد. رابطه سوریس و تاوولا ریڈس [۲۱] در ادامه آورده شده است.

$$\beta(d_0, d) = \frac{e_{min} + (e_{max} - e(d_0))}{\int_{d_{0,min}}^d e_{min} + (e_{max} - e(d_0)) \partial d_0} \quad (11)$$

تعداد ائتلاف‌هایی که برای قطره‌ای با قطر  $d_1 + \frac{\Delta d_1}{2}$  و قطره‌ای با قطر  $d_2 + \frac{\Delta d_2}{2}$  در واحد زمان و حجم رخ می‌دهد برابر است با:

$$\omega(d_1, d_2) N(d_1) \Delta d_1 N(d_2) \Delta d_2 \quad (12)$$

که  $N(d) \Delta d$  نشان‌دهنده تعداد قطره‌ها در واحد حجم است. همچنین  $\omega(d_1, d_2)$  نرخ ائتلاف می‌باشد. تعداد قطره‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$N(z, d) = \frac{P(z, d)}{V(d)} \quad (13)$$

در ارتفاع  $z$  می‌باشد.  $P(z, d)$  نرخ خالص تولید (مصرف) و  $V_d(z, d)$  نیز سرعت قطره‌ای با قطر  $d$  و در ارتفاع  $z$  است. عبارت اول در سمت راست معادله ی (۱) بیانگر اثرهای جابه‌جایی و عبارت دوم بیانگر اثرهای اختلاط محوری می‌باشد. فرضیه‌های ساده کننده برای ارزیابی مدل جدید عبارت است از:

- معادله ی (۱) در حالت پایا در نظر گرفته می‌شود.
- از اختلاط محوری در فاز پراکنده صرف‌نظر می‌شود.
- شکست قطره‌ها فقط در حالتی در نظر گرفته می‌شود که قطره مادر تنها به دو قطره فرزند شکسته شود. اندازه قطره‌های فرزند می‌تواند متفاوت باشند.
- ائتلاف قطره‌ها فقط در زیر سینی‌ها اتفاق می‌افتد.
- از هسته‌زایی و رشد قطره‌ها به دلیل ماهیت فرایند صرف‌نظر شده است.

با استفاده از فرضیه‌های ذکر شده در بالا، معادله ی (۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial [P(z, d) V_d(z, d)]}{\partial z} = P(z, d) \quad (2)$$

$P(z, d)$  برابر است با نرخ خالص تولید و مصرف بر اثر شکست و ائتلاف قطره‌ها که طبق معادله ی (۳) قابل محاسبه است.

$$P(z, d) = PB^+(z, d) - PB^-(z, d) + PC^+(z, d) - PC^-(z, d) \quad (3)$$

$PB^+$  طبق رابطه هاورلند [۹] عبارت است از:

$$PB^-(z, d) = r(z, d) P(z, d) \quad (4)$$

در معادله ی (۴)،  $r(z, d)$  فرکانس شکست بوده و برابر است با:

$$r(z, d) = p(d) \frac{V_d(z, d)}{H_c} \quad (5)$$

که  $p(d)$  احتمال شکست قطره با قطر  $d$  است و از معادله ی زیر به دست می‌آید:

$$p(d) = \text{Exp}(-C / We_p(d)) \quad (6)$$

$We_p(d)$  عدد وبر برای قطره می‌باشد و طبق معادله ی زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

(1) Tsouris and Tavlarides

پس از گسسته سازی در راستای قطر قطره، گسسته سازی در راستای مکان ستون انجام می گیرد به صورت که کل ستون به n قسمت تقسیم می شود. بعد از گسسته سازی در راستای مکان معادله ی (۱۸) با استفاده از روش تفاضل های محدود<sup>(۳)</sup> به یک تعداد معادله های جبری به صورت زیر تبدیل می شود:

$$P_k(n) = P_k(n-1) + \quad (20)$$

$$\frac{\Delta z}{V_d} \left( -\frac{1}{\Delta d_k} \sum_{i=1}^K b_{ki}^+ \varphi_i(n-1) - b_k^- \varphi_k(n-1) + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K c_{kij}^+ \varphi_i(n-1) \varphi_j(n-1) - \sum_{i=1}^K c_{ki}^- \varphi_i(n-1) \varphi_k(n-1) \right)$$

که  $b^+$ ,  $b^-$ ,  $c^+$ ,  $c^-$  توابع اندرکنش می باشند.  $\varphi$  ماندگی فاز پراکنده می باشد و از معادله ی (۲۱) قابل محاسبه می باشد [۲۰].

$$\varphi(z) = \int_0^{d_{max}} P(z, d) \quad (21)$$

شرط مرزی در پایین برج از تابع توزیع لگاریتمی - طبیعی به دست می آید [۲۰].

$$P(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log \text{div}}} \exp\left[-\frac{(\log d - \log d_{32})^2}{2(\log \text{div})^2}\right] \quad (22)$$

### مدل سازی ستون استخراج

در این قسمت با در نظر گرفتن معایب مدل های ارایه شده یک مدل دینامیکی غیرتعدادی مبتنی بر سرعت برای توصیف انتقال جرم ارایه شده تا رفتار انتقال جرمی فرایندهای استخراج مایع - مایع را به خوبی پیش بینی نماید. همچنین برای پیش بینی رفتار هیدرودینامیکی فرایند از مدل موازنه جمعیت قطره ها که در بخش "مدل سازی قطره ها با موازنه جمعیت" ارایه شد استفاده شده است. فرضیه های استفاده شده در مدل توسعه یافته به شرح زیر می باشد:

- از تغییرهای در راستای شعاع برای سرعت متوسط و غلظت صرف نظر می شود.

- سرعت فازها وابسته به انتقال جرم و غلظت جسم حل شونده می باشد.

- قطره های فاز پراکنده به صورت کروی و در ده کلاس از قطر قطره ها در نظر گرفته می شوند.
- ویژگی های فیزیکی در طول ستون ثابت در نظر گرفته می شود.

که  $V(d)$  حجم قطره می باشد. در نتیجه عبارت تولید و مصرف هر جفت قطره در اثر ائتلاف طبق رابطه مدز<sup>(۱)</sup> برابر است با [۲۰]:

$$PC^-(z, d) = P(z, d) \int_0^{\sqrt[3]{d_{max}^3 - d^3}} \omega(d_1, d_2) \frac{P(z, d_1)}{V(d_1)} \partial d_1 \quad (14)$$

$$PC^+(z, d) = \frac{1}{2} V(d) \int_0^d \omega(d_1, d_2) \frac{P(z, d_1) P(z, d_2)}{V(d_1) V(d_2)} \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \partial d_1 \quad (15)$$

همچنین از رابطه کوهلر<sup>(۲)</sup> برای محاسبه نرخ ائتلاف استفاده شده است [۲۰].

$$\omega(d_1, d_2) = 8.62 \times 10^{-7} (d_1 + d_2)^{2.33} \quad (16)$$

رابطه کوهلر هنگامی که ماندگی فاز پراکنده کمتر از ۱۰٪ باشد نتیجه های خوبی دارد. با جایگذاری روابط (۵)، (۱۰)، (۱۴) و (۱۵) در معادله ی (۲)، شکل پایانی مدل توسعه یافته به دست می آید.

$$\frac{\partial [P(z, d) V_d(z, d)]}{\partial z} = \quad (17)$$

$$\int_d^{d_{max}} r(z, d_0) P(z, d_0) \beta(d_0, d) \partial d_0 + \frac{1}{2} V(d) \int_0^d \omega(d_1, d_2) \frac{P(z, d_1) P(z, d_2)}{V(d_1) V(d_2)} \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \partial d_1 - r(z, d) P(z, d) - P(z, d) \int_0^{\sqrt[3]{d_{max}^3 - d^3}} \omega(d_1, d_2) \frac{P(z, d_1)}{V(d_1)} \partial d_1$$

معادله ی (۱۷)، یک معادله دیفرانسیلی - انتگرالی می باشد که با استفاده از روش های تحلیلی رایج قابل محاسبه نیست، از همین رو نیاز است برای حل این معادله از روش حل عددی استفاده شود. برای حل معادله ی (۱۷)، لازم است نخست رابطه مستقل از قطر قطره شود. از این رو نخست دامنه تغییرهای قطر قطره به ده کلاس با فاصله های برابر به صورت زیر تقسیم شده است:

$$d_{min} = d_0 < d_1 < \dots < d_{10} = d_{max} \quad (18)$$

حال می توان  $P(z, d)$  را به شکل زیر نوشت:

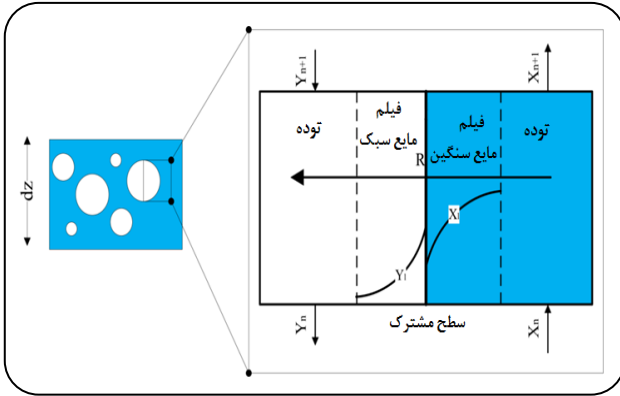
$$P(z, d) = \sum_{k=1}^{10} P_k(z) b_k(d) \quad (19)$$

$$\text{s.t. } b_k(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } d \in [d_{k-1}, d_k] \\ 0 & \text{if } d \notin [d_{k-1}, d_k] \end{cases}$$

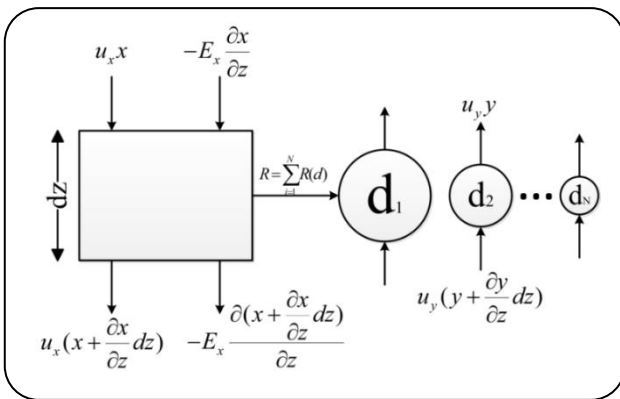
(۱) Modes

(۲) Kohler

(۳) Finite difference



شکل ۱- شماتیک مدل دو فیلمی (غیر تعادلی).



شکل ۲- شماتیک روش ساده شده اختلاط پیشرو.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{V_y}{\phi} \frac{\partial y}{\partial z} + \quad (32)$$

$$\frac{6 * \phi^2}{V_y} (x - x^*) \int_0^\infty K_c(d) \frac{u(d)f(d)}{d} \delta d$$

$x^*$  از رابطه  $y = 0.9854x$  به دست می آید [۲۳]. شرایط مرزی و اولیه برای فاز پیوسته به صورت زیر خواهد بود:

$$@ t = 0 \Rightarrow x = x_0 \quad (33)$$

$$@ z = 0 \Rightarrow \frac{\partial[(1-\phi)x]}{\partial z} = 0$$

$$@ z = Z \Rightarrow x_1 = x_{in}$$

و برای فاز پراکنده شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$$@ t = 0 \Rightarrow y = y_0 \quad (34)$$

$$@ z = 0 \Rightarrow y = y_{in}$$

برای توصیف هیدرودینامیک مسئله از مدل موازنه جمعیت با در نظر گرفتن شکست و ائتلاف قطره‌ها به صورت همزمان

• مهم‌ترین عامل غیرایده‌آل بودن جریان فاز پراکنده به علت وجود قطره‌ها با اندازه‌های متفاوت و در نتیجه ضریب‌های انتقال جرم گوناگون می‌باشد. در نتیجه از اثرهای اختلاط محوری صرف نظر می‌شود.

• انتقال جرم در یک جهت و تنها از فاز پیوسته به سمت فاز پراکنده می‌باشد.

مدل توسعه یافته بر اساس مدل دو فیلمی ارائه شده که در شکل ۱ نشان داده شده است.

برای مدل سازی انتقال جرم ستون از روش دینامیکی اختلاط پیشرو استفاده شده است. با استفاده از این روش و با توجه به شکل ۲، موازنه انتقال جرم کلی برای فاز پیوسته به شکل زیر خواهد بود:

$$(1-\phi) dz \frac{\partial x}{\partial t} dt = -V_x \frac{\partial x}{\partial z} dz dt + \quad (23)$$

$$\frac{\partial[E_x(1-\phi)(\partial x/\partial z)]}{\partial z} dz dt - R$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{V_x}{(1-\phi)} \frac{\partial x}{\partial z} + E_x \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{R}{dz dt} \quad (24)$$

موازنه انتقال جرم کلی برای فاز گسسته نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{V_y}{\phi} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{R}{dz dt} \quad (25)$$

نرخ انتقال جرم نیز با استفاده از روابط زیر محاسبه خواهد شد [۲۲].

$$R = \int_0^\infty \delta R(d) \quad (26)$$

$$\delta R(d) = K_c \frac{6}{d} \phi (x - x^*) g(d) \delta(d) dz dt \quad (27)$$

$$g(d) = \frac{\phi u(d)f(d)}{V_y} \quad (28)$$

$$u(d) = \frac{d}{d_{32}} V_s - \frac{V_x}{1-\phi} \quad (29)$$

$$R = \frac{6 * \phi^2}{V_y} (x - x^*) dz dt \int_0^\infty K_c(d) \frac{u(d)f(d)}{d} \delta d \quad (30)$$

در نتیجه با جایگذاری معادله (۳۰) در روابط موازنه جرم کلی

شکل نهایی معادله‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{V_x}{(1-\phi)} \frac{\partial x}{\partial z} + E_x \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \quad (31)$$

$$\frac{6 * \phi^2}{V_y} (x - x^*) \int_0^\infty K_c(d) \frac{u(d)f(d)}{d} \delta d$$

در المان‌های گوناگون ستون نشان می‌دهد. نتیجه‌ها نشان می‌دهد که بیش‌ترین توزیع در قطره‌های میانی می‌باشد.

با استفاده از معادله‌ی (۱۴) می‌توان توزیع تعداد قطره‌ها را در طول ارتفاع به دست آورد. در شکل ۶ توزیع تعداد قطره‌ها در طول ستون ارزیابی شده است.

مقدار توزیع تعداد قطره‌ها برای ۶ سینی انتهایی ستون در مرجع [۲۴] ذکر شده است. این مقدار با مقدار توزیع تعداد قطره‌ها در سینی ۱ و ۶ که با استفاده از شبیه‌سازی به دست آمده، مقایسه شده و نتیجه در شکل ۷ ارزیابی شده است.

در شکل ۷ دیده می‌شود که در طول ستون، اثرهای شکست قطره‌ها بر ائتلاف آن‌ها غلبه می‌کند. با توجه به افزایش غلظت جز حل شونده (اسید استیک) در فاز پراکنده در طول ستون اندازه قطره‌های کوچک‌تر می‌شود که دلیل اصلی آن کاهش کشش بین سطحی با افزایش غلظت اسید استیک در فاز پراکنده است. کاهش کشش سطحی باعث شکست قطره‌های بزرگ‌تر و تولید قطره‌های کوچک‌تر می‌شود که سرانجام، باعث کاهش قطر میانگین ساطر می‌شود، چنانچه که در شکل ۸ آورده شده است. از سویی وجود ماده حل شونده درون فاز پراکنده (قطره‌ها)، از میزان جریان‌های چرخشی و دورانی داخل آن می‌کاهد که خود منجر به پایداری بیش‌تر و افزایش زمان ائتلاف و در نتیجه کاهش میزان ائتلاف در قطره‌ها می‌شود. با توجه به دلیل‌های گفته شده، نقطه قله نمودار به سمت چپ گرایش پیدا می‌کند که نشان‌دهنده‌ی غلبه‌ی اثرهای شکست بر ائتلاف در قطره‌ها و در نتیجه کوچک شدن اندازه قطره‌ها می‌باشد. در شکل ۸، با استفاده از معادله‌ی (۳۶)، قطر میانگین ساطر توسط مدل توسعه داده شده محاسبه می‌شود و سپس با مقدارهای تجربی و رابطه نیمه تجربی مقایسه شده است [۲۴].

$$d_{32} = \frac{1}{\sum_{i=1}^K F_n(i) / d(i)} \quad (36)$$

میانگین خطا با استفاده از رابطه ۳۷ قابل محاسبه می‌شود:

$$\% \text{AARD} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{X_{i,\text{exp}} - X_{i,\text{calc}}}{X_{i,\text{exp}}} \right| \times 100 \quad (37)$$

بر اساس رابطه (۳۷) ذکر شده مقدار خطا برای ۶ سینی انتهایی ستون در جدول ۱ ارزیابی شده است. نتیجه‌ها نشان می‌دهد که مدل توسعه یافته خطای بسیار کم‌تری نسبت به رابطه نیمه تجربی ارزیابی شده برای همین داده‌ها دارد.

استفاده شد. همچنین از اثرهای اختلاط محوری در فاز پراکنده صرف نظر شد. در نتیجه معادله اصلی موازنه جمعیت به شکل زیر تبدیل شده است:

$$\frac{\partial P(z, d)}{\partial t} = \frac{[V_d * P(z, d)]_{i+1} - [V_d * P(z, d)]_i}{\Delta z} + \quad (35)$$

$$PB^+(z, d) - PB^-(z, d) + PC^+(z, d) - PC^-(z, d)$$

سعی شد که از معادله‌های عمومی تری برای عبارات شکست و ائتلاف استفاده شود. به همین منظور برای توابع  $\omega(d_1, d_2)$  و  $\beta(d_0, d)$  به ترتیب از رابطه‌های کوهلر و تسوریس-تاوالاردیس استفاده شد.

در مدل توسعه داده شده، تلاش شده با جفت کردن معادله‌های انتقال جرمی با معادله‌های موازنه جمعیت، نتیجه‌های دقیق‌تری برای ضریب‌های انتقال جرم محاسبه شود. از آن‌جا که ضریب‌های انتقال جرم به توزیع اندازه قطره‌ها در طول ستون وابسته است پس انتظار می‌رود نتیجه‌ها با داده‌های تجربی همبستگی بهتری داشته باشد و دارای خطای کم‌تری نسبت به دیگر مدل‌ها داشته باشد.

## روش حل معادله‌ها

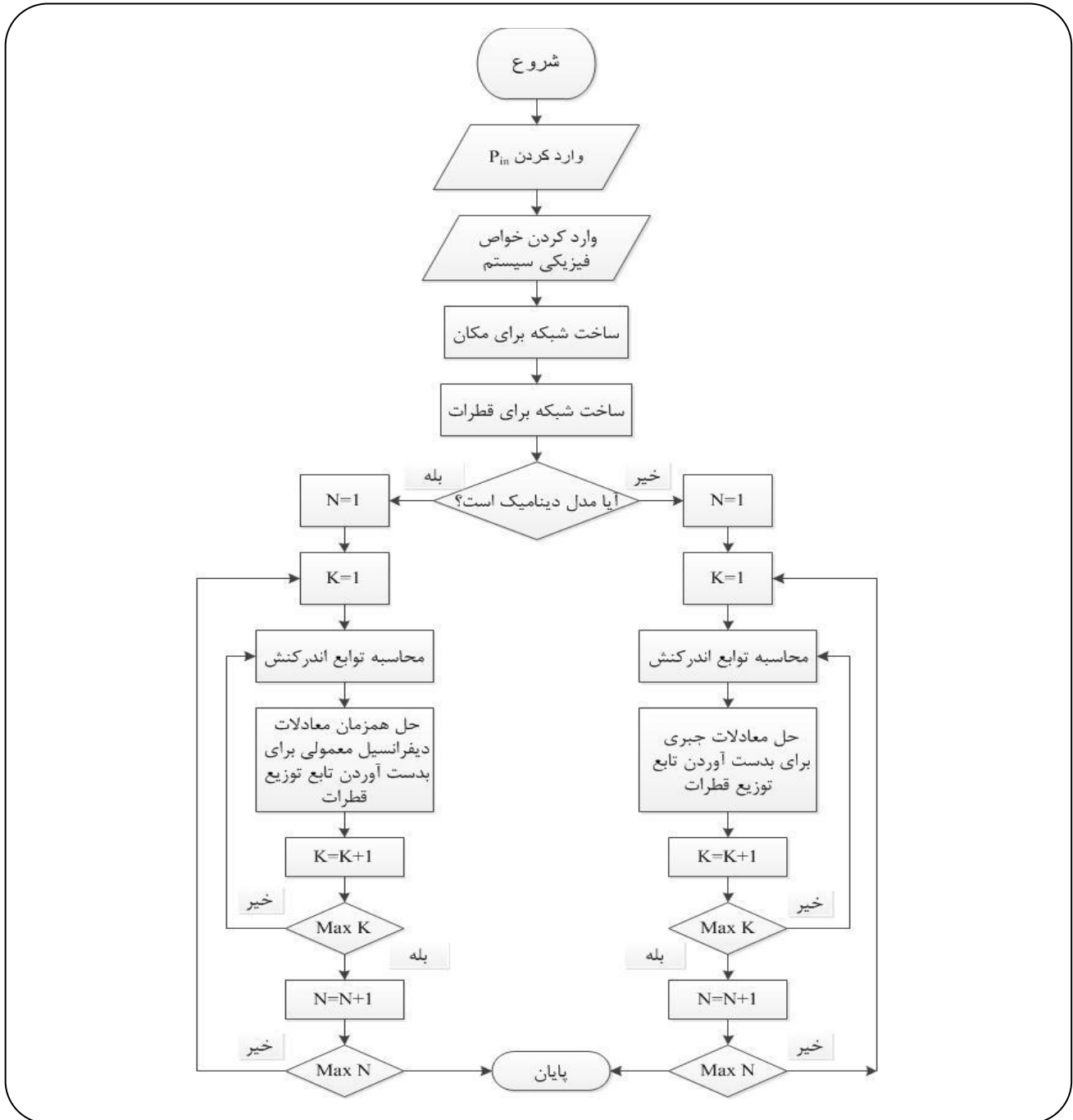
همه معادله‌های ستون به همراه معادله‌های موازنه جمعیت هم‌زمان در محیط متلب کد نویسی شده و شبیه‌سازی شده است. برای حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای ستون از ترکیب روش‌های خطوط و تفاضل مرکزی استفاده شده است. در شکل‌های ۳ و ۴ الگوریتم حل هم‌زمان معادله‌ها نشان ارزیابی شده است.

با استفاده از روش خطا و تفاضل مرکزی معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای به مجموعه معادله‌های دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. این معادله‌ها برای هر یک از المان‌های ستون نوشته شده و کلیه معادله‌ها به‌طور هم‌زمان با اعمال شرایط مرزی و اولیه با تابع‌های دیفرانسیل معمولی متلب حل شدند.

## نتیجه‌ها و بحث

### نتیجه‌های موازنه جمعیت

پس از گسسته‌سازی و حل معادله‌ها به صورت هم‌زمان می‌توان نتیجه‌های زیر را برای اندازه قطره‌ها و همچنین توزیع اندازه به دست آورد. در شکل ۵، توزیع اندازه برحسب زمان و مکان ستون نشان شده است. این شکل توزیع اندازه قطره‌ها را

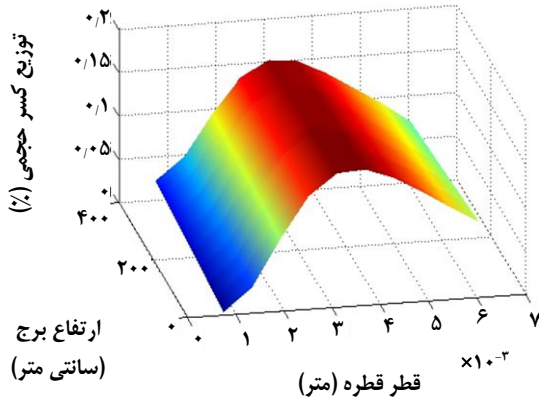


شکل ۳- الگوریتم حل عددی معادله‌های موازنه جمعیت.

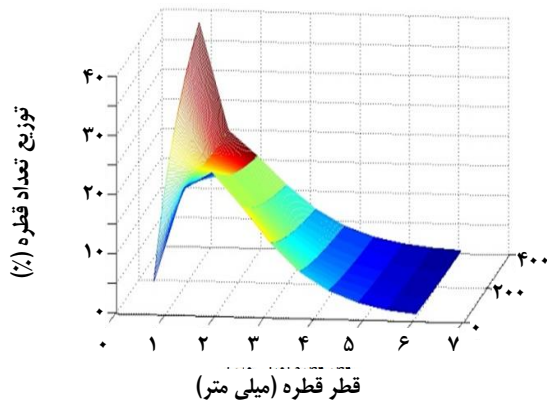
از قطر میانگین در حالت ورودی به ستون باشد. در مدل توسعه یافته این پدیده به خوبی در نظر می‌شود. در شکل ۹ تغییرهای قطر میانگین ساطر با قدرت ضربه نشان داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود با افزایش قدرت ضربه در ستون قطر میانگین قطره‌ها کاهش یافته و باعث افزایش

همچنین رابطه نیمه تجربی مقداری ثابت در طول ستون برای مقدار میانگین قطر قطره‌ها ارائه می‌دهد. با توجه به شکل ۵، از آنجاکه اثرهای شکست قطره‌ها بر اثرهای ائتلاف غلبه می‌کند، بنابراین قطره‌ها با قطر بزرگ‌تر به قطره‌ها با قطر کوچک‌تر تبدیل می‌شود. در نتیجه قطر میانگین قطره‌ها در طول ستون باید کم‌تر





شکل ۵ - توزیع حجمی قطره‌ها برحسب قطر قطره‌ها و طول ستون.

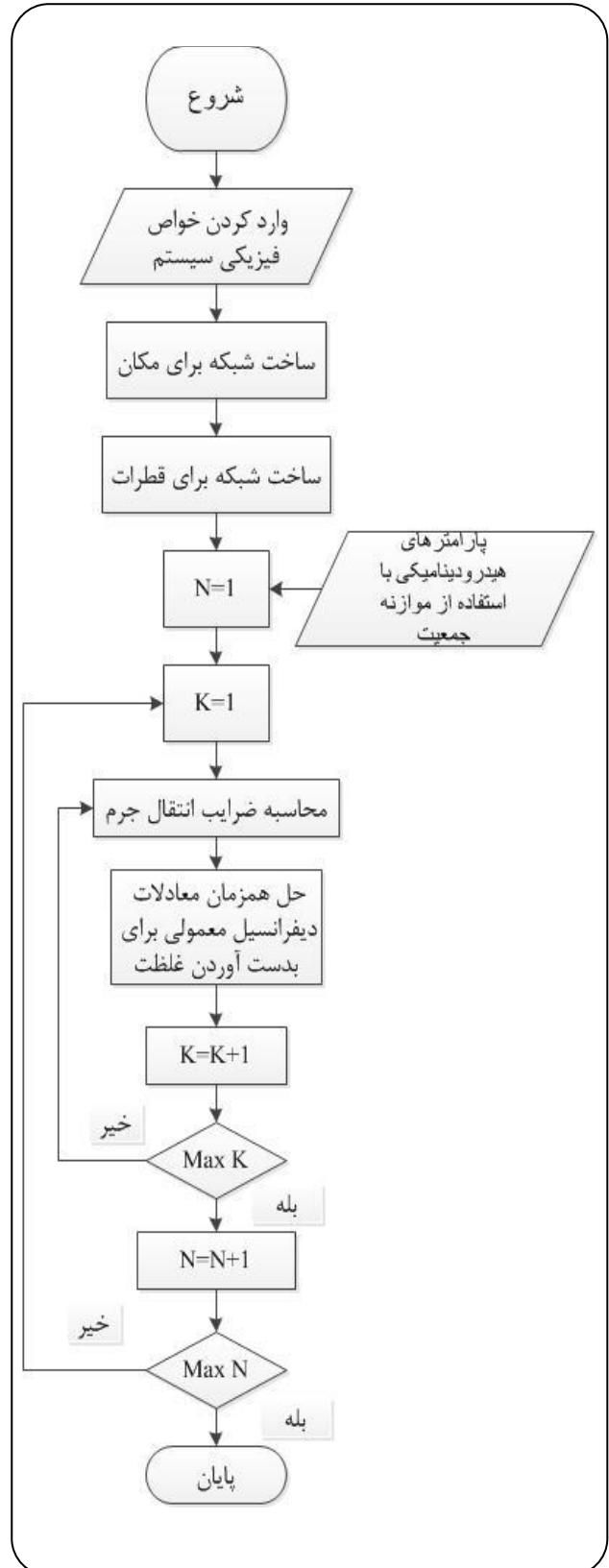


شکل ۶ - توزیع تعداد اندازه قطره‌ها برحسب قطر قطره‌ها و طول ستون.

سطح تماس دو فاز شده و در نتیجه انتقال جرم بین دو فاز افزایش می‌یابد. نتیجه‌های مدل‌سازی موازنه جمعیت نیز تطابق خوبی با داده‌های تجربی دارد.

### نتیجه‌های انتقال جرمی

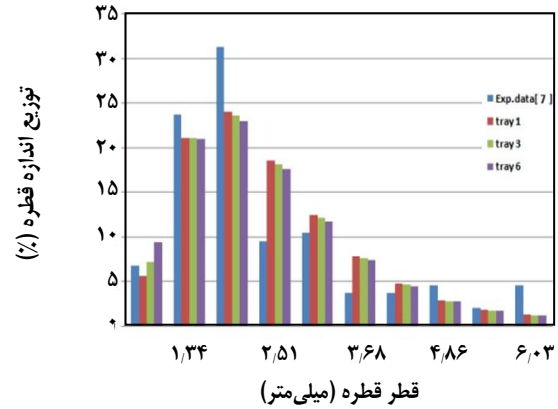
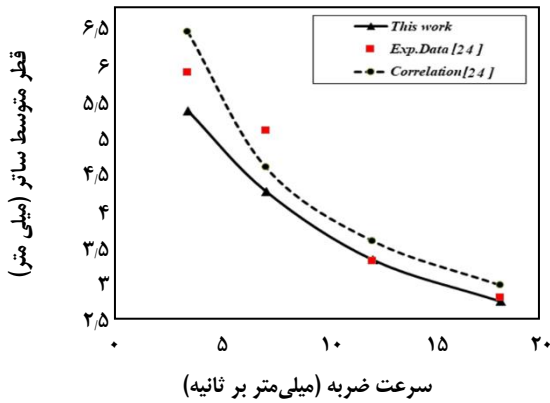
همان‌گونه که در بخش ارایه مدل توسعه داده شده اشاره شد، برای رسیدن به نتیجه‌های بهتر از اطلاعاتی که از شبیه‌سازی موازنه جمعیت به دست آمد، در معادله‌های موازنه جرم استفاده شده است. برای انتقال جرم از فاز پراکنده به فاز پیوسته می‌باشد. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نتیجه‌های شبیه‌سازی شده به همراه مقادیرهای تجربی [۲۳] و همچنین مدل تانگ و همکاران [۱۳] مقایسه شده است. نتیجه‌ها نشان می‌دهد به علت استفاده از نتیجه‌های موازنه جمعیت دقت شبیه‌سازی بیش تر شده و به نتیجه‌های تجربی نزدیک تر می‌باشد.



شکل ۴ - الگوریتم حل عددی معادله‌های مدل توسعه یافته.

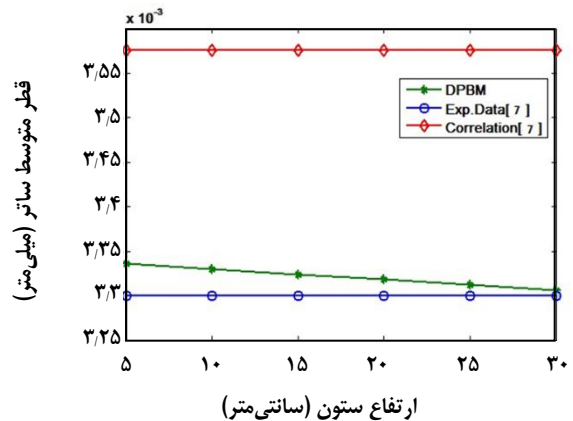
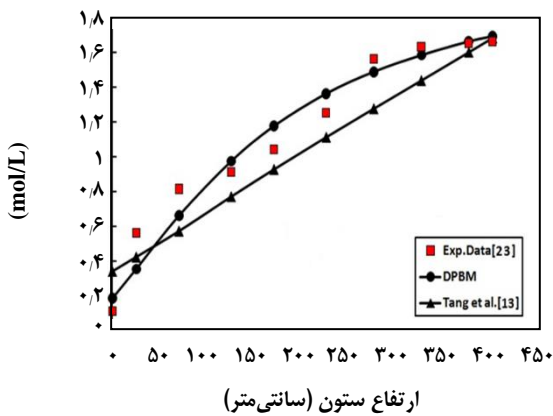
جدول ۱- مقایسه خطای مدل موازنه جمعیت و رابطه نیمه تجربی.

شماره سینی	خطای مدل توسعه یافته (%)	خطای رابطه نیمه تجربی (%)
۱	۱/۰۹۵۸	۸/۳۶۳۶
۲	۰/۹۱۵	۸/۳۶۳۶
۳	۰/۷۳۵۳	۸/۳۶۳۶
۴	۰/۵۵۶۹	۸/۳۶۳۶
۵	۰/۳۷۹۷	۸/۳۶۳۶
۶	۰/۲۰۳۷	۸/۳۶۳۶
میانگین خطا	۰/۶۴۸۲	۸/۳۶۳۶



شکل ۹- تغییرهای قطر میانگین ساطر بر حسب قدرت ضربه.

شکل ۷- مقایسه مقدارهای تجربی و شبیه سازی برای توزیع تعداد قطره ها.



شکل ۱۰- غلظت در فاز پیوسته بر حسب طول ستون- مقایسه نتیجه های شبیه سازی با داده های آزمایشگاهی و مدل تانگ و همکاران [۱۳].

شکل ۸- قطر میانگین ساطر بر حسب ارتفاع ستون در ۶ سینی انتهایی.

جدول ۲- خطای مدل ارایه شده و مدل تانگ و همکاران نسبت به داده های تجربی [۲۳].

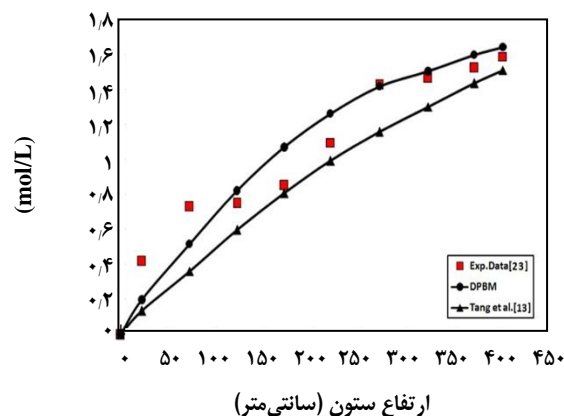
ارتفاع (cm)	غلظت در فاز پیوسته		غلظت در فاز پراکنده	
	مدل تانگ و همکاران [۱۳]	مدل توسعه داده شده	مدل تانگ و همکاران [۱۳]	مدل توسعه داده شده
۰	۱/۹۹	%۶۴	۰/۰	۰/۰
۲۵	%۲۴	%۳۶	%۶۷	%۵۲
۷۵	%۲۹	%۱۸	%۵۰	%۲۹
۱۲۵	%۱۵	%۶	%۲۰/۴	%۹
۱۷۵	%۱۱	%۱۲	%۵	%۲۵
۲۲۵	%۱۱	%۸	%۹	%۱۴
۲۷۵	%۱۸	%۴	%۱۸	%۰/۱۶
۳۲۵	%۱۱	%۲	%۱۱	%۲/۶
۳۷۵	%۳	%۰/۱۶	%۵/۹	%۴/۷
۴۰۰	%۱/۲	%۱/۸	%۴/۹	%۳/۳
AARD%	%۳۲/۶	%۱۵/۸	%۲۰/۹	%۱۵/۹

در مدل توسعه یافته مقادریایی بهتر نسبت به مدل تانگ و همکاران به دست می آید. طبق معادله (۳۷) میانگین خطا برای مدل توسعه داده شده در این پژوهش و مدل تانگ و همکاران در جدول ۲ ارایه شده است.

همان گونه که دیده می شود میزان خطا در فاز پیوسته و فاز پراکنده بر اساس مدل توسعه یافته در این پژوهش، نسبت به خطای تانگ و همکاران به میزان بیشتری کاهش یافته است. این نتیجه ها نشان می دهد که با توجه به این که اندازه قطر قطره ها بر اساس موازنه جمعیت ارایه شده دقیق تر محاسبه شده در نتیجه بر اساس این نتیجه های میزان انتقال جرم دقیق تر محاسبه شده است.

### نتیجه گیری

در این پژوهش یک مدل توسعه یافته برای پیش بینی رفتار هیدرودینامیکی و انتقال جرمی یک ستون استخراج ضربه ای سینی دار بر اساس ترکیب مدل موازنه جمعیت و مدل غیرتعادلی مبتنی بر سرعت ارایه شد. توزیع اندازه قطره ها با استفاده از مدل موازنه جمعیت در ارتفاع های گوناگون از ستون محاسبه شد. نتیجه ها نشان داد که شکست قطره ها نسبت به ائتلاف قطره ها اثرهای بیشتری بر روی توزیع اندازه قطره ها دارد. همچنین در این پژوهش قطر میانگین ساتر مورد بررسی قرار گرفت.



شکل ۱۱ - غلظت در فاز پراکنده بر حسب طول ستون - مقایسه نتیجه های شبیه سازی با داده های آزمایشگاهی و مدل تانگ و همکاران [۱۳].

چنانچه دیده می شود نتیجه های مدل تانگ و همکاران مقادریایی کم تر از مقدار داده های تجربی را نشان می دهد. دلیل این امر هم این است که این مدل از توزیع اندازه قطره های یکنواخت برای کل ستون استفاده شده است. به همین دلیل برای نقطه های بالایی ستون که قطره ها شکسته شده و کوچک تر می شوند ضربه های انتقال جرم و در نتیجه شار انتقال جرم کمتری نسبت به حال تجربی به دست می آید. با بهبود بخشیدن توزیع اندازه قطره ها

R	فاکتور افزایش برای انتقال جرم (-)	مقدارهای به دست آمده برای قطر میانگین ساتر با استفاده از مدل توسعه یافته با داده های آزمایشگاهی و رابطه نیمه تجربی تانگ و همکاران مقایسه شد. مقدارهای خطا برای مدل توسعه یافته کم تر از رابطه نیمه تجربی بود. توزیع اندازه قطره ها در دو حالت توزیع حجمی اندازه قطره ها و توزیع تعدادی اندازه قطره ها در فاز پراکنده و در طول ستون و برای ده کلاس از قطر قطره ها ارایه شد و با داده های تجربی مقایسه شد. در مدل سازی برای محاسبه غلظت از روش اختلاط پیشرو غیر تعادلی بر پایه تئوری دو فیلمی استفاده شد. نتیجه ها نشان داد که مدل ارایه شده با دقت بیشتری نسبت به مدل های قبلی غلظت جزء انتقال شونده را در دو فاز پیش بینی می نماید.
Re	عدد رینولدز (-)	
Sc	عدد اشمیت (-)	
T	زمان، s	
V	سرعت ظاهری، m/s	
V <sub>s</sub>	سرعت لغزشی، m/s	
V <sub>T</sub>	سرعت حد قطره، m/s	
x*	غلظت فاز پراکنده در تعادل با فاز پیوسته (-)	
<b>نمادهای یونانی</b>		
$\emptyset, \varphi$	موجودی فاز پراکنده (-)	
$\alpha$	مقیاسی از پیوند قطره (-)	
$\rho$	دانسیته، kg/m <sup>3</sup>	
$\Delta\rho$	اختلاف دانسیته بین فازها، kg/m <sup>3</sup>	
$\mu$	ویسکوزیته، Pa.s	
$\sigma$	کشش بین سطحی، N/m	
$\epsilon$	مقدار تلفات انرژی مکانیکی در واحد جرم، W/kg	
$\Psi$	مقدار تلفات انرژی، m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	
e	ضریب تخلخل (-)	
C	ضریب به هم فشردگی (-)	
<b>زیر نویس ها</b>		
C	فاز پیوسته	
D	فاز پراکنده	
O	مقدار کل	
X	فاز x	
Y	فاز y	
<b>بالا نویس ها</b>		
*	مقدار تعادلی	
A	مساحت سطح مشترک، m <sup>2</sup> /m <sup>3</sup>	
a	دامنه ضربه، m	
c <sub>1</sub> , c <sub>2</sub> , c <sub>3</sub> , c <sub>4</sub>	ثابت های معادله (-)	
C <sub>D</sub>	ضریب درگ (-)	
d <sub>32</sub>	قطر میانگین ساتر قطره، m	
D	ضریب نفوذ مولکولی، m <sup>2</sup> /s	
D <sub>eff</sub>	ضریب نفوذ مؤثر، m <sup>2</sup> /s	
D <sub>E</sub>	ضریب نفوذ گردابه ای، m <sup>2</sup> /s	
E	ضریب اختلاط محوری، m <sup>2</sup> /s	
e	مقدار سطح آزاد (-)	
J	شار انتقال جرم، mol/m <sup>2</sup> s	
G	شتاب جاذبه، m/s <sup>2</sup>	
H	ارتفاع مؤثر ستون، m	
h <sub>c</sub>	ارتفاع محفظه، m	
k <sub>1</sub> , k <sub>2</sub> , k <sub>3</sub> , k <sub>4</sub>	ثابت های معادله (-)	
K	ضریب انتقال جرم، m/s	
M	ضریب توزیع (-)	
N <sub>ox</sub>	تعداد مراحل واقعی انتقال (-)	
Pe	عدد پکلت (-)	
Q	شدت جریان فاز پراکنده یا پیوسته، m <sup>3</sup> /s	
<b>فهرست نمادها</b>		

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۲ ؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۷/۱۶

## مراجع

[1] Kislik V. S., "Solvent Extraction: Classical and Novel Approaches", Elsevier, (2012).

- [2] Asadollahzadeh M., Shahhosseini Sh., Torab-Mostaedi M., Ghaemi A., [Drop Behavior in a Pilot Plant Oldshue–Rushton Extraction Column for Three Various Liquid-Liquid Systems](#), *Sep. Purif. Technol.*, **159**: 7-17 (2016).
- [3] Asadollahzadeh M., Torab-Mostaedi M., Shahhosseini Sh., Ghaemi A., [Experimental Investigation of Dispersed Phase Holdup and Flooding Characteristics in a Multistage Column Extractor](#), *Chem. Eng. Res. Design*, **105**: 177-187 (2016).
- [4] Asadollahzadeh M., Hemmati A., Torab-Mostaedi M., Shirvani M., Ghaemi A., Mohsenzadeh Z., [Use of axial Dispersion Model for Determination of Sherwood Number and Mass Transfer Coefficients in a Perforated Rotating Disc Contactor](#), *Chinese J. Chem. Eng.*, **25**: 53-61 (2017).
- [5] Hosseinzadeh M., Shirvani M., Ghaemi A., [A Study on Mean Drop Size and Drop Size Distribution in an Educator Liquid–Liquid Extractor](#), *Sep. Purif. Technol.*, **201**: 205-213 (2018).
- [6] Garg, M.O., Pratt, H.R.C., [Measurement and Modeling of Droplet Coalescence and Breakage in a Pulsed-Plate Extraction Column](#), *AIChE J.*, **30**: 432-441 (1984).
- [7] Mohanty, S., Vogelpohl, A., [A Simplified Hydrodynamic Model for a Pulsed Sieve-Plate Extraction Column](#), *Chem. Eng. & Proc.*, **36**: 385-395 (1997).
- [8] Khani Al, Gourdon S.D., Casamatta C., [Dynamic and Steady State Simulation of Hydrodynamics and Mass Transfer in Liquid-Liquid Extraction Column](#), *Chem. Eng. Sci.*, **53**: 1295-1305 (1989).
- [9] Haverland, H., Vogelpohl, A., Gourdon, C., Casamatta, G., [Simulation of Hydrodynamics in a Pulsed Sieve-Plate Column](#), *Chem. Eng. Technol.*, **10**: 84-91 (1987).
- [10] Luo, G.S., Li, H.B., Tang, X.J., Wang, J.D., [Drop Breakage in a Coalescence-Dispersion Pulsed-Sieve-Plate Extraction Column](#), *Chem. Eng. J.*, **102**: 185-191 (2004).
- [11] Weinstein O, Semiat R and Lewi D.R., [Modeling, Simulation and Control of Liquid-Liquid Extraction Columns](#), *Chem. Eng. Sci.*, **53(2)**: 325-339 (1998).
- [12] Bastani D., [Stage-Wise Modeling of Liquid-Liquid Extraction Column](#), *IJE Transactions.*, **17(1)**: 7-17 (2004).
- [13] Tang X, Luo G, and Wang J., [A Dynamicforward Mixing for Evaluating the Mass Transfer Performance of an Extraction Column](#), *Che. Eng. Sci.*, **59(21)**: 4457-4466 (2004).
- [14] Mjalli F.S, Fletcher J.P., [Modeling, Simulation and Control of Scheibel Liquid-Liquid Contactor: Part 1. Dynamic Analysis and System Identification](#), *Chem. Eng & Process.*, **44(5)**: 541-553 (2005).
- [15] Ettouney R.S, El-Rifai M.A., Ghallab A.O., [Steady State Modeling of Perforated Plate Extraction Columns](#), *Chem. Eng & Process.*, **46(8)**: 713-720 (2007).
- [16] Morales C, Elman H, and Perez A., [Modeling and Simulation of Liquid Extraction Column with Structured Packing](#), *C&C Eng.*, **31(12)**: 1694-1701 (2007).
- [17] Martunus, Helwani Z, Othman M.R., [Forward Mixing Model In A Rotating Disc Contactor for Kerosene–Acetic Acid–Water System](#), *Chem. Eng. Sci.*, **34(10)**: 2901-2909 (2010).

- [18] Ettouney R.S, El-Rifai M.A, [Composition Dynamics in Perforated Plate Liquid Extraction Column](#), *IChem E.*, **89(11)**: 2228-2235 (2011).
- [19] Casamatta, G., Vogelpohl, A. [Modeling of Fluid Dynamics and Mass Transfer in Extraction Column](#), *Ger. Chem. Eng.*, 96-103(1985).
- [20] Godfery, J.C., Slater, M.J., "[Liquid-Liquid Extraction Equipment](#)", John Wiley & Sons, Inc., (1994).
- [21] Wang, T., Wang, J., Jin, Y., [A Novel Theoretical Break-Up Kernel Function for Bubble/Droplets in a Turbulent Flow](#), *Chem. Eng. Sci.*, 4629-4637 (2003).
- [22] Qian, Y., Wang, J.D., [Modelling of Mass Transfer in Extraction Columns with Drop Forward-Mixing and Coalescence-Redispersion](#), *Can. J. Chem. Eng.*, 88-96 (1992).
- [23] Usman, M.R., Hussain, S.N., Rehman, L., Bashir, M., Butt, M.A., [Mass Transfer Performance in a Pulsed Sieve-Plate Extraction Column](#), *Proc. Pakistan Acad. Sci.*, 173-179 (2006).
- [24] Usman, M.R., Rehman, L., Bashir, M., [Drop size and Drop Size Distribution in a Pulsed Sieve-Plate Extraction Column](#), *Proc. Pakistan Acad. Sci.*, 41-46 (2008).