

بهینه‌سازی فرایند جدایش تفریقی دیسپروسیم و گادولینیم در شرایط عدم قطعیت

سید محمد سید علیرزاده گنجی، محمد حیاتی*⁺

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

چکیده: عنصرهای کمیاب در طبیعت بیش‌تر به صورت اکسید یافت می‌شوند و چون از نظر ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی بسیار شباهت دارند، جدایش آن‌ها از همدیگر بسیار مشکل است. از این رو بررسی و انتخاب مناسب‌ترین روش‌های جدایش عنصرهای کمیاب، بسیار دارای اهمیت دارد. در نتیجه در این پژوهش در گام اول، به منظور مدل‌سازی و بهینه‌سازی عامل‌های مؤثر بر بهبود جدایش تفریقی دیسپروسیم و گادولینیم، پنج عامل شامل میزان pH نسبت حجم سیانکس ۲۷۲ به دپا، غلظت حلال‌های آلی، زمان انجام فرایند و غلظت لاکتیک اسید، انتخاب شدند. سپس به منظور طراحی آزمایش‌ها از نرم‌افزار DX7 استفاده شد و بر اساس آن تعداد ۲۹ آزمایش تعیین شد. ولی از سویی در انجام آزمایش‌ها موردهایی مانند وزن کردن با دستگاه، آماده سازی محلول‌ها با غلظت مشخص، برداشتن حجم‌های متفاوت و عیارسنجی از موردهایی هستند که می‌توانند عامل ایجاد خطا و در نتیجه عدم قطعیت باشند، به همین دلیل بحث تحلیل احتمالاتی به منظور مدل‌سازی در شرایط عدم قطعیت، برای اطمینان سنجی نتیجه‌های به دست آمده، می‌تواند بسیار کارگشا باشد. برای این منظور در گام دوم، بر اساس داده‌های به دست آمده از آزمایش‌ها و رابطه‌های به دست آمده بین متغیرهای ورودی و خروجی، نخست نوع و ویژگی‌های تابع توزیع احتمالی، هر کدام از پنج پارامتر مؤثر ورودی تعیین شد و بر اساس آن‌ها و با توجه به نتیجه‌های شبیه‌سازی، ویژگی‌های تابع توزیع پارامترهای خروجی (درصد بازیابی دیسپروسیم و گادولینیم) به دست آمد.

واژه‌های کلیدی: عنصرهای کمیاب؛ جدایش تفریقی؛ طراحی آزمایش‌ها؛ عدم قطعیت؛ شبیه‌سازی مونت کارلو.

KEYWORDS: Rare elements; Separation fractional; Experimental design; Uncertainty; Monte Carlo simulation.

مقدمه

(به صورت اکسیدی هستند) و از نظر ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی بسیار شباهت دارند، جدایش آن‌ها از همدیگر به منظور استفاده آن‌ها در صنعت، بسیار مشکل است. از این رو بررسی و انتخاب مناسب‌ترین روش‌های جدایش عنصرهای کمیاب، اهمیت بسیار دارد. در این میان استفاده از روش‌های استخراج با حلال آلی ترکیبی، مانند سامانه دوگانه سیانکس ۲۷۲

عنصرهای کمیاب کاربردهای فراوانی مانند ساخت سنگ آتش‌زنه فندک‌ها، تابنده‌ها (لامپ‌های فلورسنت)، صفحه نمایش (LCD)، لوح فشرده (CD)، آهنرباهای همیشگی، باتری‌های خانگی و باتری‌های قابل شارژ تلفن همراه، سوپر هادی دمای بالا، مخزن‌های حمل و ذخیره گاز هیدروژن و غیره دارند [۱ - ۳]. با توجه به این‌که این عنصرها در طبیعت به صورت خالص یافت نمی‌شوند

+E-mail: hayati.m@lu.ac.ir

*عده دار مکاتبات

از شبیه‌سازی به روش مونت کارلو با استفاده از نرم‌افزار @RISK در محیط اکسل استفاده شد. تاکنون مطالعه‌های محدودی در زمینه تحلیل احتمالاتی برای مدل سازی عدم قطعیت با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو در حوزه مهندسی معدن به ویژه فرآوری مواد معدنی انجام شده است. به عنوان نمونه در سال ۱۹۹۵ میلادی، کیم یک روش احتمالاتی برای تخمین ویژگی‌های مقاومتی توده سنگ ارایه کرد. وی از روش مونت کارلو برای شبیه‌سازی و توان دوم کای برای برازش نتیجه‌های آزمایش‌ها در سنگ بازالت استفاده نمود [۷]. فتنون و گریفیتس با ترکیب روش اجزای محدود و مونت کارلو ظرفیت باربری را به صورت احتمالاتی بررسی کردند [۸]. قفاری و همکاران در سال ۲۰۱۲ میلادی بر روی تحلیل احتمالاتی و حساسیت در مدارهای پیچیده فرآوری مواد معدنی به روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کردند [۹]. ماریو و همکاران در سال ۲۰۱۲ میلادی از شبیه‌سازی مونت کارلو برای تحلیل عدم قطعیت در فرایند استخراج هیپ جامد مورد استفاده قرار دادند [۱۰]. روی زو و همکاران در سال ۲۰۰۲ میلادی به منظور مدل‌سازی کیفیت آب در شرایط عدم قطعیت از روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کردند [۱۱]. سلاسه در سال ۱۹۹۹ میلادی در تخمین عدم قطعیت رسوب تحکیمی سد کنی در کلرادو از روش مونت کارلو استفاده کرد [۱۲]. ال سوادی و همکاران در سال ۲۰۱۵ میلادی از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای تحلیل عدم قطعیت در مدل‌سازی پراکندگی جوی گازه‌های سمی در یک منطقه استفاده کردند [۱۳]. احامد و ملکرس در سال ۲۰۰۶ میلادی برای محاسبه گرادیان و تخمین حساسیت پارامترهای مؤثر در یک سامانه از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کردند [۱۴]. کادینی و همکاران در سال ۲۰۱۰ میلادی به منظور ارزیابی عملکرد ایمنی مخازن زباله‌های رادیو اکتیو بر روی آب‌های زیر زمینی از روش شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل سازی خود استفاده کردند [۱۵]. کادینی و همکاران در سال ۲۰۱۳ میلادی به منظور ارزیابی عملکرد نفوذ مواد رادیو نوکلئید از مخزن‌های زباله‌های رادیو اکتیو در شکستگی سنگ‌ها از روش شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل سازی خود استفاده کردند [۱۶]. کادینی و گیولتا در سال ۲۰۱۶ میلادی به منظور تخمین احتمال شکست در یک سامانه در شرایط عدم قطعیت از روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کردند [۱۷]. دهقانی و همکاران در سال ۲۰۱۴ میلادی برای ارزیابی اقتصادی پروژه‌های معدنی در شرایط عدم قطعیت در مدل‌سازی خود از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کردند [۱۸].

و دپا به همراه لاکتیک اسید به عنوان یک عامل کمپلکس‌ساز مناسب، می‌تواند برای بهبود جدایش عنصرهای کمیاب از همدیگر مورد بررسی قرار گیرد [۴]. آپاتیت یکی از اصلی‌ترین کانی‌های دارای عنصرهای کمیاب می‌باشد که در ایران، در ناحیه مرکزی و معدن فسفات اسفوردی یافت می‌شوند. همچنین از فرآورده‌های جنبی کارخانه‌های کانه آرایبی سنگ آهن مانند معدن چادرملو، آپاتیت می‌باشد. بیش‌ترین میزان فراوانی عنصرهای کمیاب در معدن چادرملو و اسفوردی به ترتیب مربوط به دیسپروسیم با عیار ۱۴۵ و گادولینوم با عیار ۵۲۲ ppm است. در نتیجه در این پژوهش در گام اول، به منظور مدل‌سازی و بهینه‌سازی عامل‌های مؤثر بر بهبود جدایش تفریقی (درصد استخراج) دیسپروسیم و گادولینیم، پنج عامل مؤثر و مهم (pH، نسبت حجم سیانکس ۲۷۲ به دپا، غلظت حلال‌های آلی، زمان انجام فرایند و غلظت لاکتیک اسید)، انتخاب شدند. سپس به منظور طراحی آزمایش‌ها از نرم‌افزار Design Expert (DX7) استفاده شد و بر اساس آن تعداد ۲۹ آزمایش با شرایط تعیین شده برای انجام توسط نرم افزار پیشنهاد شد. ولی از سویی در انجام آزمایش‌ها به طور معمول دو نوع خطا شامل خطاهای ناشی از پراکندگی داده‌های اندازه‌گیری شده دور میانگین و خطاهای سیستمی وجود دارد که می‌توانند منجر به ایجاد عدم قطعیت در محاسبه‌ها و نتیجه‌ها شوند [۵]. پراکندگی در اندازه‌گیری مربوط به یک آزمایش به این ترتیب است هرگاه یک آزمایش معین بارها انجام گیرد مقدارهای به‌دست آمده متفاوت خواهد بود. خطای سیستمی که ناشی از روش اندازه‌گیری نادرست باشد با تکرار آزمایش بر طرف نمی‌شود ولی اگر به علت محدودیت در تعداد آزمایش باشد با افزایش تعداد آزمایش و در نتیجه با افزایش مقدار داده‌ها کاهش می‌یابد. وزن کردن با دستگاه، آماده‌سازی محلول‌ها با غلظت مشخص، برداشتن حجم‌های متفاوت، انجام آزمایش جدایش، آنالیز با دستگاه و سایر خطاهای انسانی از موردهایی هستند که می‌توانند عامل ایجاد خطا و در نتیجه عدم قطعیت باشند، به همین دلیل بحث تحلیل احتمالاتی به منظور مدل‌سازی در شرایط عدم قطعیت، برای اطمینان سنجی به جواب‌های به‌دست آمده از محاسبه‌ها، می‌تواند بسیار مهم باشد [۶]. از جمله روش‌های تحلیل احتمالاتی، فناوری‌های شبیه‌سازی هستند که از معروف‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. از این رو در گام دوم به منظور تحلیل مدل ریاضی درصد استخراج دیسپروسیم و درصد استخراج گادولینیم در شرایط عدم قطعیت

تحلیل احتمالاتی

مفهوم تحلیل احتمالاتی هنگامی روشن‌تر می‌شود که در مقابل تحلیل قطعی مطرح و مورد بحث قرار گیرد. در تحلیل قطعی پارامترها معین، بدون پراکندگی و خطا در نظر گرفته می‌شوند، سپس با اعمال ضریب اطمینان پارامترهای طراحی محاسبه و استفاده می‌شوند. گروهی از مهندسان بر این باورند که ضریب اطمینان دارای معنی و مفهوم فیزیکی ضعیفی است و انتخاب مقدار قانع کننده آن دشوار است. این پارامترها نمی‌توانند به تنهایی نشان دهنده ایمنی باشند به ویژه وقتی که پارامترهای ورودی تحلیل دارای نامعینی و پراکندگی در توزیع خود باشند در این موردها از تحلیل اعتمادپذیری استفاده می‌شود. وقتی نامعینی و خطاها در اندازه‌گیری پارامترها به حدی باشد که میزان اعتبار محاسبه‌ها را کاهش دهد استفاده از روش تحلیل احتمالاتی برای اطمینان سنجی جواب‌های به‌دست آمده از محاسبه‌ها راه حلی مناسب است. از جمله روش‌های تحلیل اعتمادپذیری، فناوری‌های شبیه‌سازی هستند که روش مونت کارلو از پر کاربردترین روش‌های شبیه‌سازی است. روش‌های شبیه‌سازی، به هر روش عددی اطلاق می‌شود که برای ایجاد شرایط سامانه در حالت واقعی و طبیعی به کار می‌رود. نتیجه‌های این روش بسیار شبیه به جواب واقعی است و مونت کارلو یکی از مهم‌ترین ابزار مهندسی برای تحلیل آماری عدم قطعیت موجود در مسائل است [۶]. روش شبیه‌سازی مونت کارلو روشی است که با استفاده از تعدادی عدد تصادفی از توزیع احتمالی متغیرها، تابع نهایی را شبیه‌سازی می‌کند. امروزه روش مونت کارلو در مسائل بسیار پیچیده که ماهیتی غیر قطعی هستند، کاربرد بسیاری دارد. شیوه نمونه‌گیری در روش مونت کارلو تصادفی است به این معنی که هر نمونه به شکل تصادفی از بازه توزیع داده‌های ورودی انتخاب می‌شود [۱۹]. این روش شامل مرحله‌های زیر است:

- ۱- انتخاب روش حل تحلیلی قطعی مناسب (مدل برازشی مناسب).
- ۲- انتخاب پارامترهای ورودی برای مدل‌سازی احتمالاتی و کمی‌سازی تغییرهای آن.
- ۳- نمونه‌گیری تصادفی برای هر پارامتر که از تابع چگالی احتمال و یا ستون داده‌های مربوط به آن پارامتر انتخاب می‌شوند.
- ۴- حل مسئله از روش تحلیل قطعی با مجموعه‌ی پارامترهای انتخاب شده برای محاسبه تابع عملکرد.
- ۵- عملیات با تکرار مرحله‌های ۳ و ۴ تا رسیدن به تعداد کافی

شبیه‌سازی ادامه می‌یابد و با استفاده از مقادیر خروجی، تابع توزیع عملکرد و در نتیجه احتمال شکست مشخص می‌شود. این روش دارای برتری‌هایی مانند نبود محدودیت در تعداد پارامترها، زمان کم‌تر، امکان استفاده از محیط نرم افزار اکسل، امکان بهینه‌سازی تابع، سادگی و راحتی استفاده و هماهنگی با انواع تابع‌ها و نیاز نداشتن به شرایط مرزی را دارد به همین دلیل به خاطر سادگی استفاده و فرض‌های ساده کننده آن، شبیه‌سازی مونت کارلو در بسیاری از پژوهش‌ها به کار برده شده است. همچنین به علت جواب‌های دقیق‌تری که در مقایسه با سایر روش‌های اعتمادپذیری به دست می‌دهد، در میان پژوهشگران مسئله قابلیت اعتماد به روشی متداول تبدیل شده است که در این پژوهش هم از این روش استفاده شده است. این روش به ویژه در مسئله‌های پیچیده‌ای که متغیری تصادفی بی‌شماری توسط معادله‌های غیر خطی به یکدیگر مرتبط هستند، بدون محدودیت خاصی قابل کاربرد است. در یافتن برآوردهای مناسب برای حل مسئله‌هایی که یا نمی‌توان آن را به صورت ریاضی مدل‌بندی کرد و یا حل ریاضی آن مشکل است، این روش دستیابی به جواب را ممکن می‌سازد. شبیه‌سازی مونت کارلو برای به‌کار بردن و ارایه گزارش نتیجه‌های اطلاعات با سرعت زیاد، ساده و راحت است. برای انجام شبیه‌سازی مونت کارلو، برای هر پارامتر بر اساس توابع توزیع احتمال (به عنوان نمونه توزیع نرمال، پواسون، لاگ نرمال و ...) عدددهایی تولید می‌شود و محاسبه‌های بعدی با استفاده از این عددها انجام می‌شود. در فرایند شبیه‌سازی با استفاده از روش مونت کارلو، می‌توان دریافت که تکرار ۱۰۰۰ بار در مورد ثابت و پایداری نتیجه‌های نهایی عدد کوچکی است. با تکرار بیش‌تر، برای نمونه ۱۰۰۰۰ بار، نتیجه‌های یکسانی به دست خواهد آمد [۲۰].

روش و طرح انجام آزمایش

به منظور مدل‌سازی و بهینه‌سازی عامل‌های مؤثر بر بهبود جدایش تفریقی (درصد استخراج) دیسپروسیم و گادولینیم، پنج عامل مؤثر و مهم (pH، نسبت حجم سیانکس ۲۷۲ به دپا، غلظت حلال‌های آلی، زمان و غلظت اسید لاکتیک)، انتخاب شدند. بازه‌ی تغییرهای این عامل‌ها به همراه نماد مربوطه در جدول ۱ درج شده است. برای طراحی آزمایش‌ها از نرم‌افزار Design Expert (DX7) بر مبنای روش سطح پاسخ (طرح مرکب مرکزی) استفاده شد و بر اساس آن تعداد ۲۹ آزمایش

جدول ۱- عامل‌های مؤثر به همراه سطح‌ها براساس طرح مرکب مرکزی.

فاکتورها	واحد	علامت	سطح پایین محوری	سطح پایین فاکتوریل	سطح مرکزی	سطح بالای فاکتوریل	سطح بالای محوری
میزان pH	-	A	۰٫۵	۱	۲	۳	۳٫۵
نسبت حجم سیانکس ۲۷۲ به دپا	-	B	۰٫۲۵	۱	۲٫۵	۴	۴٫۷۵
غلظت حلال‌های آلی	مول برایت	C	۰٫۰۲۵	۰٫۰۵	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۱۷۵
زمان	مول برایت	D	۲٫۵	۵	۱۰	۱۵	۱۷٫۵
غلظت اسید لاکتیک	مول برایت	E	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۸	۱٫۲	۱٫۴

با شرایط تعیین شده توسط نرم افزار پیشنهاد شد. در این راستا برای انجام آزمایش‌های تعیین شده، محلول معرف، دارای ppm ۱۸۳/۶۱ دیسپروسیم و ppm ۱۷۵/۷۶ گادولینیم تهیه شد و حلال‌های آلی شامل دپا ($C_{16}H_{35}O_4P$) و سیانکس ۲۷۲ ($C_{16}H_{35}O_2P$) با خلوص بالای ۹۵ درصد و کروزمین به عنوان رقیق کننده استفاده شدند. آزمایش بر روی نمونه‌های معرف آزمایشگاهی (محلول سنتتیک) انجام شد. مقدرهای محاسبه شده متغیر پاسخ (درصد استخراج عناصر نادر دیسپروسیم و گادولینیم) برای هر کدام از ۲۹ آزمایش در جدول ۲ آورده شده است. در آزمایش‌های استخراج با حلال‌های آلی برای هم زدن مخلوط دو فاز آبی و آلی از یک همزن مغناطیسی مدل (SHIN SAENO) با ۴۵۰ دور در دقیقه استفاده شد. pH محلول (فاز آبی) پیش از استخراج با یک متر مدل RS323 Interface AZ8601 اندازه گیری شد. آنالیز فاز آبی نمونه‌ها (پس از جدایش فاز آبی از فاز آلی به وسیله کیف جداکننده) با استفاده از دستگاه ICP-Varian سازمان زمین شناسی انجام گرفت.

$$(1) \quad (E \text{ dy})^2 = +977861,7 + 2740,33 \times A - 780,23 \times B + 117425,5 \times C + 11550,39 \times D - 12376,8 \times E + 980,86 \times A \times B - 136366 \times A \times C - 232315 \times A^2$$

همچنین نتیجه‌های آنالیز واریانس توسط نرم افزار DX7 برای مدل‌سازی درصد استخراج گادولینیم مطابق معادله (۲) در جدول ۴ درج شده است. برای این مدل نیز، ضرائب تعیین R^2 و Adjusted R^2 به ترتیب ۰٫۹۶۷۱ و ۰٫۹۴۸۹ به دست آمد. این امر نشان می‌دهد که مدل می‌تواند با دقت ۹۰٫۶۵ درصد، میزان استخراج گادولینیم را پیش بینی کند. در این مورد میزان دقت کافی، ۲۳/۴۴۵ به دست آمد که نشان دهنده هشدار به اغتشاش کافی و در نتیجه مناسب بودن مدل برای هدایت فضای طرح می‌باشد.

$$(2) \quad (EGd) = +94,02 + 34,89 \times A - 7,51 \times B + 9,60 \times C + 1,29 \times D - 0,69 \times E + 8,59 \times A \times B - 10,77 \times A \times C - 5,47 \times B \times C + 6,36 \times D \times E - 26,25 \times A^2$$

در ادامه با وارد کردن نتیجه‌های آزمایش‌های گوناگون (پاسخ‌ها) در نرم افزار DX7، ضمن آنالیز واریانس، مدل برازشی غیر خطی برای پاسخ مربوطه (درصد استخراج دیسپروسیم) به وسیله نرم افزار تعیین شد (معادله (۱)). در آنالیز واریانس هدف شناسایی عامل‌های مؤثر و همچنین ترتیب آن‌ها از نظر اهمیت در پاسخ آزمایش‌ها با انجام یک سلسله عملیات ریاضی است. نتیجه‌های به دست آمده از آنالیز واریانس باید به گونه‌ای باشد که مدل انتخابی معنی‌دار (میزان احتمال P کم‌تر از ۰٫۰۵) باشد. در ضمن برای آن که یک مدل توانایی خوبی برای برازش اطلاعات داشته باشد لازم است که R^2 آن بالای ۰٫۸ باشد. نتیجه‌های آنالیز واریانس برای مدل درجه دوم مربوط به پاسخ

جدول ۲- ماتریس طرح مرکب مرکزی کسری انجام آزمایش‌ها و مقادیرهای پاسخ (درصد استخراج عنصرهای نادر).

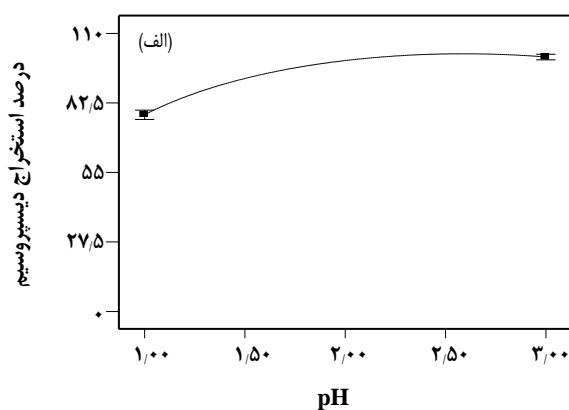
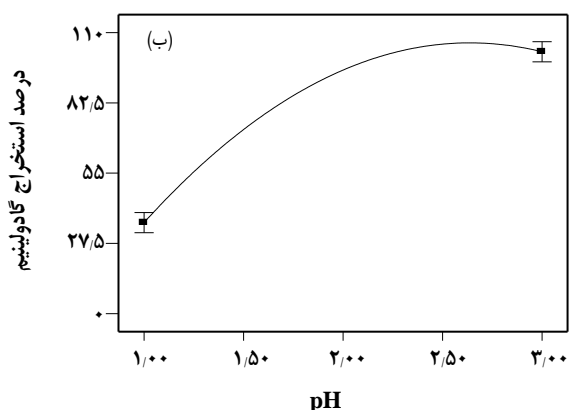
درصد استخراج		پارامترهای طراحی					شماره آزمایش
E Gd	E Dy	E	D	C	B	A	آزمایشگاهی
۲۸/۵۷	۸۶/۱۵	۰/۴	۱۵	۰/۱۵	۴	۱	۱
۱۳/۰۴	۷۷/۵۸	۱/۲	۵	۰/۱۵	۴	۱	۲
۷۶/۵۲	۹۸/۱۵	۰/۴	۵	۰/۱۵	۱	۱	۳
۹۴/۶۸	۹۸/۹۱	۱/۲	۵	۰/۰۵	۴	۳	۴
۹۹/۶۶	۹۹/۹۵	۰/۸	۱۰	۰/۱۷۵	۲/۵	۲	۵
۹۹/۹۶	۹۹/۹۶	۰/۴	۱۵	۰/۰۵	۴	۳	۶
۹۲/۰۱	۹۹/۳۰	۰/۸	۱۰	۰/۱	۴/۷۵	۲	۷
۹۸/۵	۹۹/۸۷	۰/۸	۱۰	۰/۱	۲/۵	۲	۸
۹۹/۲۷	۹۹/۹۱	۱/۴	۱۰	۰/۱	۲/۵	۲	۹
۱۰/۷۱	۷۱/۵۹	۱/۲	۵	۰/۰۵	۱	۱	۱۰
۰/۲۰	۰/۶۸	۰/۸	۱۰	۰/۱	۲/۵	۰/۵	۱۱
۰/۷۰	۱۹/۳۵	۰/۴	۵	۰/۰۵	۴	۱	۱۲
۹۹/۸۷	۹۹/۸۶	۱/۲	۵	۰/۱۵	۱	۳	۱۳
۸۲/۲۷	۹۸/۷۸	۱/۲	۱۵	۰/۱۵	۱	۱	۱۴
۹۷/۴۶	۹۹/۷۵	۰/۴	۱۵	۰/۱۵	۱	۳	۱۵
۹۹/۸۲	۹۹/۲۰	۱/۲	۱۵	۰/۰۵	۱	۳	۱۶
۹۸/۹۳	۹۹/۹۱	۰/۸	۱۰	۰/۱	۲/۵	۲	۱۷
۹۸/۵۵	۹۹/۸۹	۰/۸	۱۰	۰/۱	۲/۵	۲	۱۸
۹۹/۵۳	۹۹/۹۷	۰/۴	۵	۰/۰۵	۱	۳	۱۹
۰/۵۰	۱۶/۶۷	۱/۲	۱۵	۰/۰۵	۴	۱	۲۰
۹۹/۹۲	۹۹/۹۱	۰/۸	۱۰	۰/۱	۲/۵	۳/۵	۲۱
۱۳/۰۴	۷۴/۳۶	۰/۴	۱۵	۰/۰۵	۱	۱	۲۲
۹۹/۸۰	۹۹/۹۳	۱/۲	۱۵	۰/۱۵	۴	۳	۲۳
۹۸/۷۰	۹۹/۹۲	۰/۸	۱۰	۰/۰۲۵	۲/۵	۲	۲۴
۹۹/۵۱	۹۹/۹۵	۰/۸	۱۷/۵	۰/۱	۲/۵	۲	۲۵
۸۷/۴۸	۹۶/۷۹	۰/۸	۱۰	۰/۰۲۵	۲/۵	۲	۲۶
۹۹/۳۷	۹۹/۹۳	۰/۸	۲/۵	۰/۱	۲/۵	۲	۲۷
۹۹/۹۸	۹۹/۹۸	۰/۴	۵	۰/۱۵	۴	۳	۲۸
۹۹/۹۸	۹۹/۹۸	۰/۸	۱۰	۰/۱	۰/۲۵	۲	۲۹

جدول ۳- آنالیز واریانس مدل درجه دوم برای درصد استخراج دیسپروسیم.

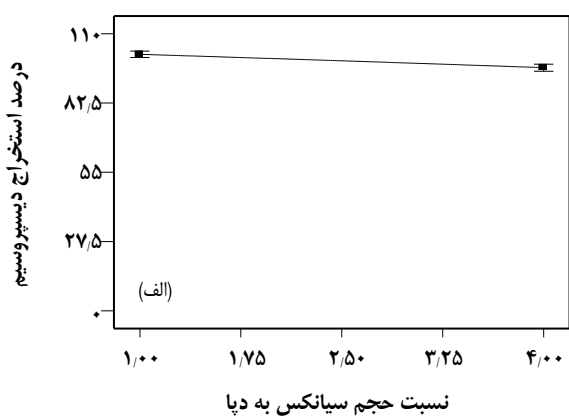
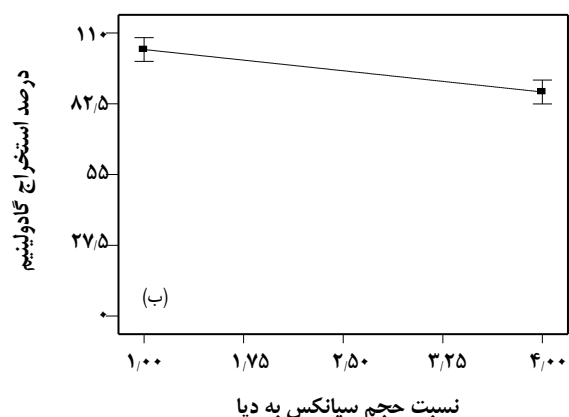
منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	میزان F	میزان P
مدل	۳,۰۳E+۱۲	۸	۳,۷۹E+۱۱	۶۶,۵۴	< ۰,۰۰۰۱
pH (A)	۱,۵۴E+۱۲	۱	۱,۵۴E+۱۲	۲۷,۰۲۶	< ۰,۰۰۰۱
نسبت حجم دو حلال (B)	۱,۲۵E+۱۱	۱	۱,۲۵E+۱۱	۲۱,۹۱	۰,۰۰۰۱
غلظت حلال‌های آلی (C)	۲,۸۳E+۱۱	۱	۲,۸۳E+۱۱	۴۹,۶۲	۰,۰۰۰۱
زمان (D)	۲,۷۳E+۹	۱	۲,۷۳E+۹	۰,۴۸	۰,۴۹۶۳
غلظت اسید لاکتیک (E)	۳,۱۴E+۹	۱	۳,۱۴E+۹	۰,۵۵	۰,۴۶۶۴
AB	۱,۵۴E+۱۱	۱	۱,۵۴E+۱۱	۲۷,۰۲	< ۰,۰۰۰۱
AC	۲,۹۸E+۱۱	۱	۲,۹۸E+۱۱	۵۲,۲۳	۰,۰۰۰۱
A ^۲	۶,۲۸E+۱۱	۱	۶,۲۸E+۱۱	۱۱۰,۲۳	۰,۰۰۰۱
باقیمانده	۱,۱۴E+۱۱	۲۰	۵,۷۰E+۹	-	-
انحراف استاندارد	میانگین	R ²	R ² تنظیم شده	R ² پیش بینی شده	دقت متناسب
۷۵۴۷۲,۰۶	۸۱۳۶۳۹,۱	۰,۹۶۳۸	۰,۹۴۹۴	۰,۹۲۶	۲۶,۴۷۷

جدول ۴ - آنالیز واریانس مدل درجه دوم برای درصد استخراج گادولینیم.

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	میزان F	میزان P
مدل	۴,۰۲۸,۵۸	۱۰	۴۰۲,۸۶	۵۳,۰۰	< ۰,۰۰۰۱
pH (A)	۲۴۹۶,۸۳	۱	۲۴۹۶,۸۳	۳۲۸,۸۶	< ۰,۰۰۰۱
نسبت حجم دو حلال (B)	۱۱۵۶,۰۵	۱	۱۱۵۶,۰۵	۱۵,۲۳	۰,۰۰۱۰
غلظت حلال‌های آلی (C)	۱۸۹۰,۰۴	۱	۱۸۹۰,۰۴	۲۴,۹۰	۰,۰۰۰۱
زمان (D)	۳۴,۵۲	۱	۳۴,۵۲	۰,۴۵	۰,۵۰۸۷
غلظت اسید لاکتیک (E)	۹,۸۶	۱	۹,۸۶	۰,۱۲۹	۰,۷۲۲۸
AB	۱۱۸۱,۱۲	۱	۱۱۸۱,۱۲	۱۵,۵۶	۰,۰۰۰۹
AC	۱۸۵۶,۱۰	۱	۱۸۵۶,۱۰	۲۴,۴۵۴	۰,۰۰۰۱
BC	۴۷۸,۱۹	۱	۴۷۸,۱۹	۶,۳۰	۰,۰۲۱۸
DE	۶۴۷,۵۷	۱	۶۴۷,۵۷	۸,۵۳۱	۰,۰۰۹۱
A ^۲	۸۰۱۴,۲۸	۱	۸۰۱۴,۲۸	۱۰۵,۵۹	< ۰,۰۰۰۱
باقیمانده	۱۳۶۶,۲۲۳	۱۸	۷۵,۹۰۱	-	-
انحراف استاندارد	میانگین	R ²	Adjusted R ²	Predicted R ²	Adequate Precision
۸/۷۱۲	۷۵,۴۶۶	۰,۹۶۷۱	۰,۹۴۸۹	۰,۹۰۶۵	۲۳,۴۴۵



شکل ۱- تأثیر pH بر درصد استخراج (الف): دیسپروسیم، (ب): گادولینیم.



شکل ۲- تأثیر نسبت حجم سیانکس به دپا بر درصد استخراج (الف): دیسپروسیم، (ب): گادولینیم.

عنصرهای نادر) رسم می‌شوند، بیشتر می‌تواند قابل درک باشد (شکل ۸).

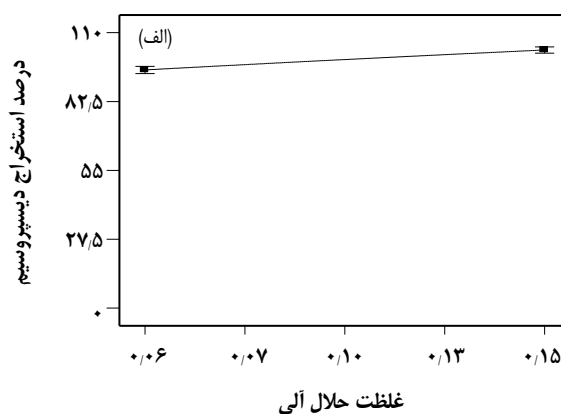
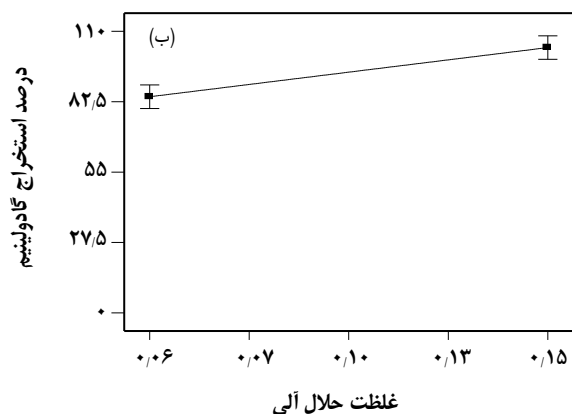
نتیجه‌های شبیه‌سازی عدم قطعیت

به منظور تحلیل مدل ریاضی درصد استخراج دیسپروسیم و درصد استخراج گادولینیم تحت شرایط عدم قطعیت از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، از نرم‌افزار @Risk در محیط اکسل استفاده شد. برای این منظور بر اساس داده‌های ۲۹ آزمایش انجام شده، ابتدا مطابق شکل ۹ و جدول ۵، نوع و ویژگی‌های تابع توزیع احتمالی هر کدام از پنج پارامتر مؤثر تعیین شد. تابع توزیع پارامتر A از نوع یکنواخت، تابع توزیع پارامترهای B، C و E از نوع بتا و تابع توزیع پارامتر D از نوع مثلثی می‌باشد که همگی متغیرهای تصادفی پیوسته هستند.

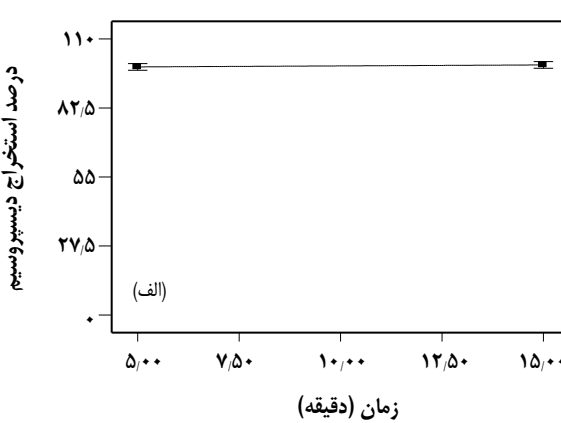
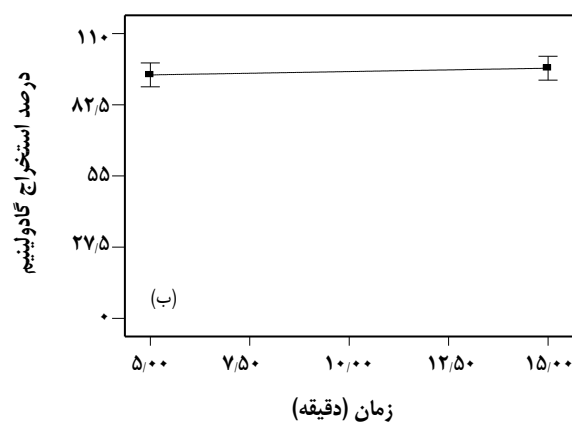
بررسی تأثیر پارامترها و اندکشی آن‌ها

پس از انتخاب مدل برازش مناسب، از طریق آنالیز واریانس و توزیع مناسب باقیمانده‌ها، نمودار تأثیر پارامترهای اصلی بر درصد استخراج عناصر نادر به صورت نمودار در شکل‌های (۱ تا ۵) نشان داده شده است.

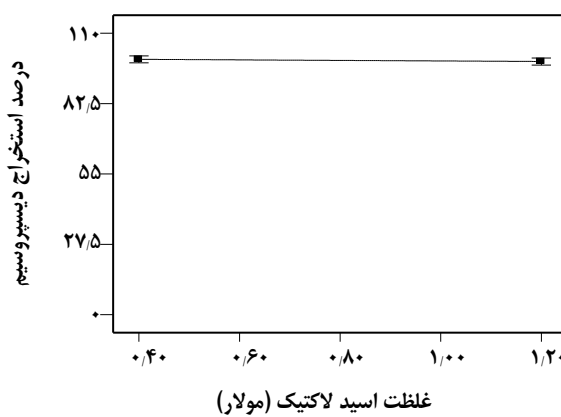
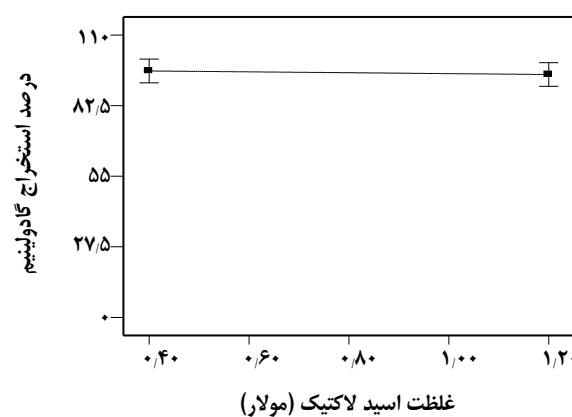
افزون بر تأثیرهای اصلی پارامترها، اندرکنش فاکتورها نیز مورد بررسی قرار گرفت که نتیجه‌های آن‌ها به صورت نمودارهای ۶ و ۷ آمده است نتیجه‌های به دست آمده بیانگر آن است که اندرکنش pH- نسبت حجم سیانکس به دپا و pH- غلظت حلال‌های آلی بر درصد استخراج دیسپروسیم به صورت سهمی درجه دو تأثیر مثبت دارد. همچنین تفسیرهای انجام شده و نتیجه‌های به دست آمده از طریق نمودار سطوح هم تراز که در آن دو فاکتور دو به دو در برابر پاسخ خروجی (درصد استخراج



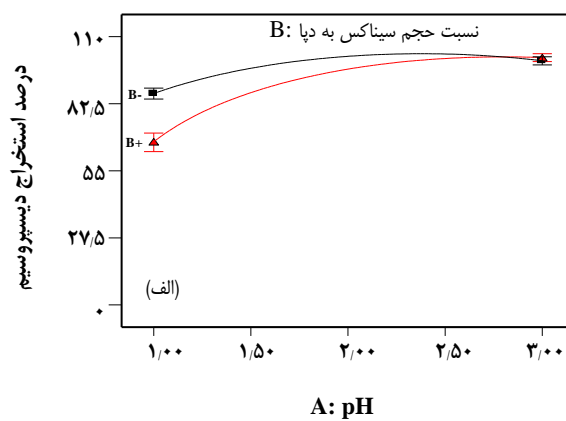
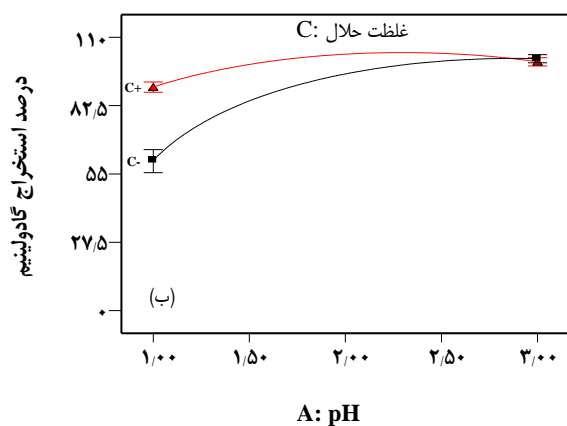
شکل ۳- تأثیر غلظت حلال آلی بر درصد استخراج الف): دیسپروسیم، ب): کادولینیم.



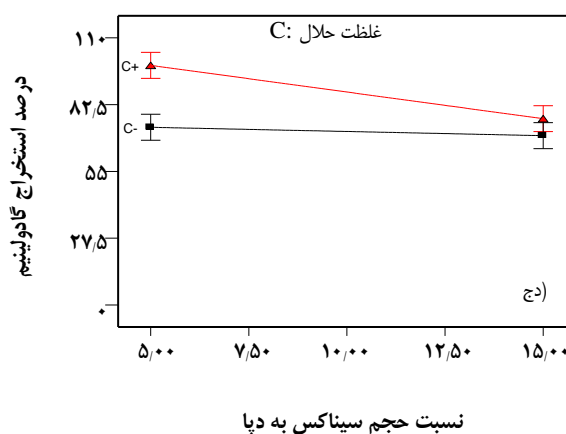
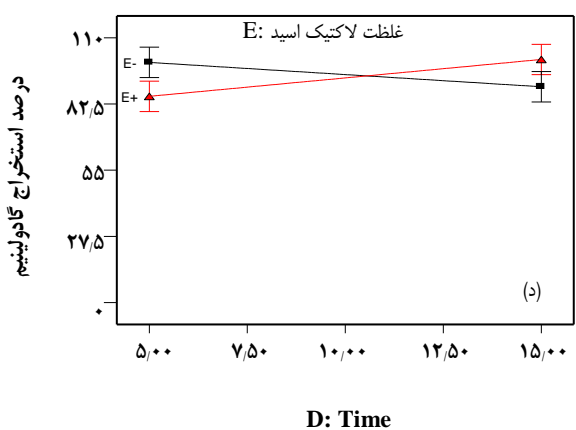
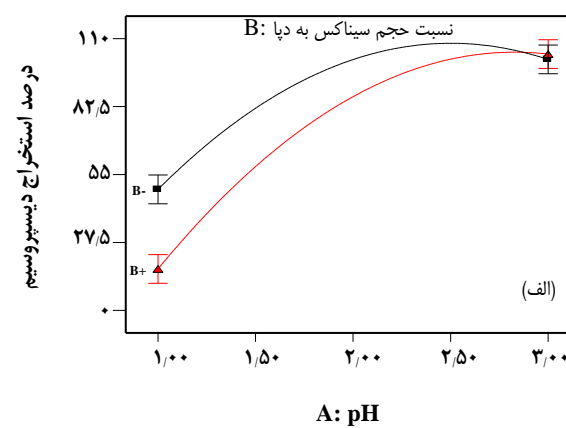
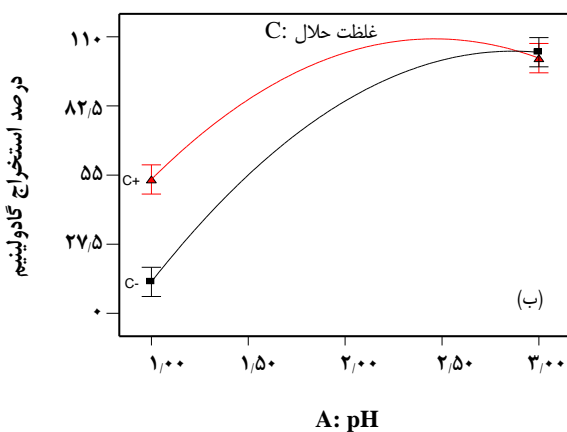
شکل ۴- تأثیر زمان بر درصد استخراج الف): دیسپروسیم، ب): کادولینیم.



شکل ۵- تأثیر غلظت اسید لاکتیک بر درصد استخراج الف): دیسپروسیم، ب): کادولینیم.



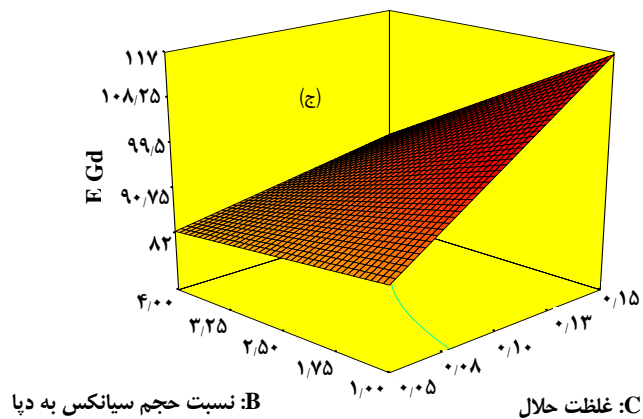
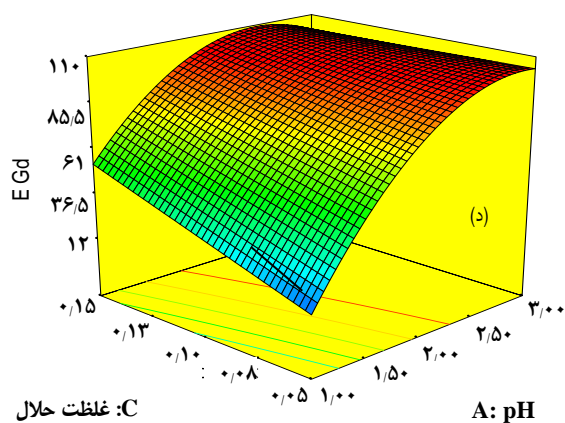
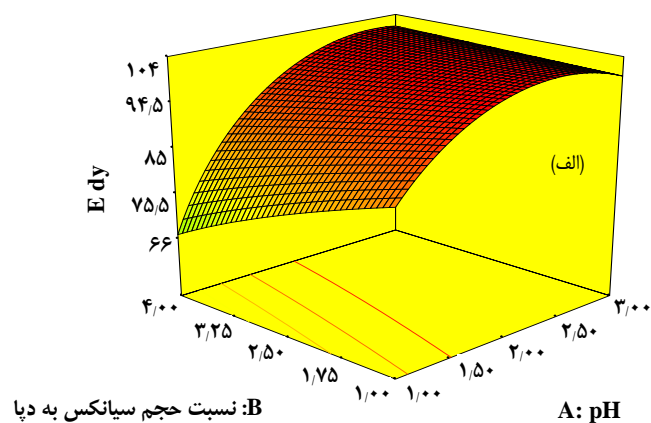
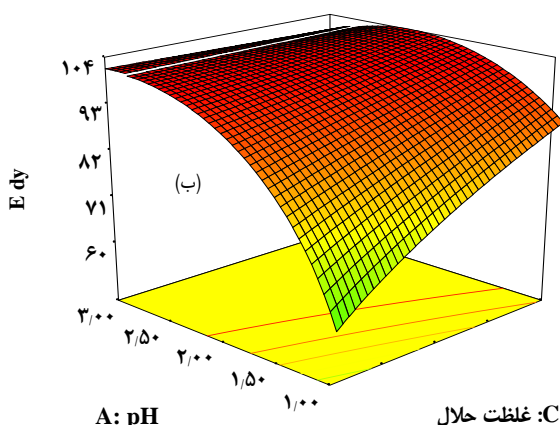
شکل ۶ - الف): نمودار اثر متقابل pH - نسبت حجم سیانکس به دپا (ب): و اثر متقابل pH - غلظت حلال‌های آلی بر درصد استخراج دیسپروسیم.



شکل ۷ - الف): اثر متقابل pH - نسبت حجم سیانکس به دپا، (ب): اثر متقابل pH - غلظت حلال‌های آلی، (ج): اثر متقابل غلظت حلال‌های آلی - نسبت سیانکس به دپا، (د): اثر متقابل غلظت اسید لاکتیک - زمان بر درصد استخراج گادولینیم.

جدول ۵ - ویژگی‌های پارامترهای مؤثر (ورودی) در شبیه‌سازی عدم قطعیت میزان استخراج عناصر گادولینیم و دیسپروسیم.

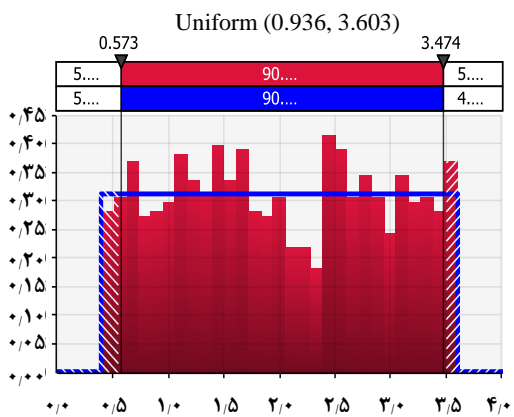
متغیر	نماد	نوع تابع توزیع	مقدار حداقل	مقدار حداکثر	مقدار میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
میزان pH	A	یکنواخت	۰٫۳۹۸	۳٫۵۹۹	۲٫۰۵۸	۰٫۹۴۰	-۰٫۰۷۶	۱٫۷۹۵
نسبت حجم سیانکس به دپا	B	بتا	۰٫۲۵۱	۵٫۱۹۹	۲٫۶۳۲	۰٫۵۵۰	۰٫۰۵۹	۱٫۶۸۸
غلظت حلال‌های آلی	C	بتا	۰٫۰۲۵	۰٫۱۷۵	۰٫۰۹۷	۰٫۰۵۲	۰٫۱۰۲	۱٫۵۵۱
زمان	D	مثلی	۱٫۲۷۰	۱۸٫۴۸۲	۰٫۰۶۲	۳٫۶۴۵	۰٫۰۵۵	۲٫۴۹۹
غلظت اسید لاکتیک	E	بتا	۰٫۴۰۰	۴٫۸۳۷	۰٫۹۶۹	۰٫۷۹۷	۱٫۹۰۴	۶٫۶۰۰



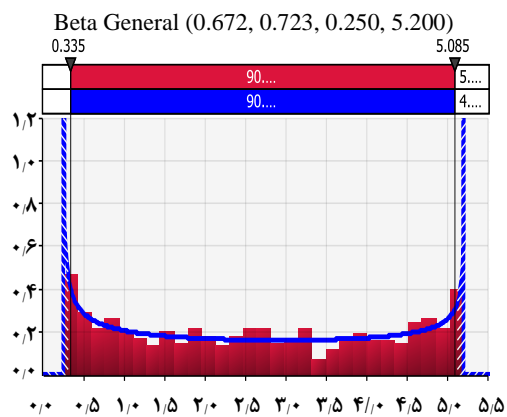
شکل ۸- الف): سطح‌های تراز فاکتورهای مهم: الف): pH - نسبت حجم سیانکس به دپا بر استخراج دیسپروسیم، ب): pH - غلظت حلال آلی بر استخراج دیسپروسیم، ج): غلظت حلال آلی - نسبت حجم سیانکس به دپا بر استخراج گادولینیم، د): pH - غلظت حلال آلی بر استخراج گادولینیم

درصد استخراج دیسپروسیم (E Dy) به دست آمده برابر ۸۶٫۲۳ درصد و انحراف معیار استاندارد، بیشینه و کمینه آن به ترتیب برابر ۱۶٫۱۶، ۹۹٫۹۷ و ۷٫۹۲ می‌باشد. همچنین چولگی نمودار توزیع آن منفی است زیرا مقدار میانگین از میانه و نما کوچک‌تر است.

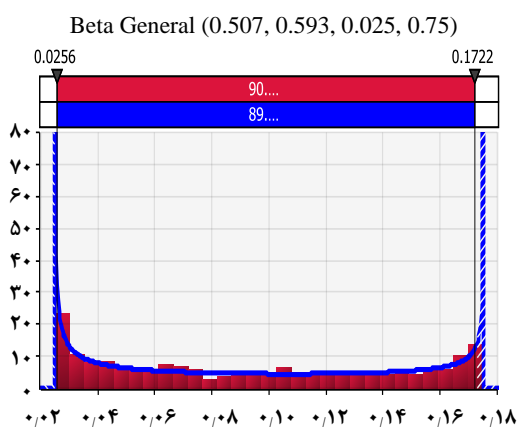
در ادامه با در نظر گرفتن رابطه‌های (۱) و (۲)، برای شبیه‌سازی تعداد تکرار برابر ۱۰۰۰۰۰ در نظر گرفته شد. نتیجه‌های شبیه‌سازی در جدول‌های ۶ الی ۸ و شکل‌های ۱۰ الی ۱۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۰ و جدول ۶ دیده می‌شود که میانگین



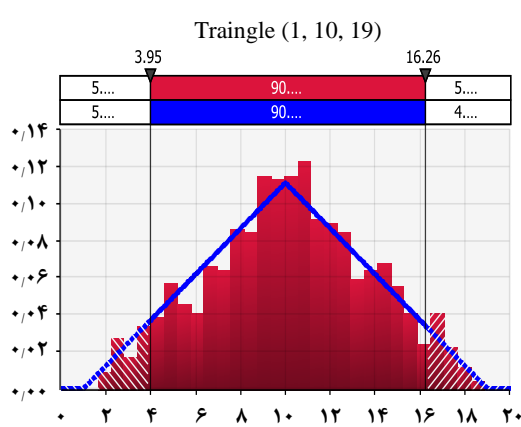
(A)



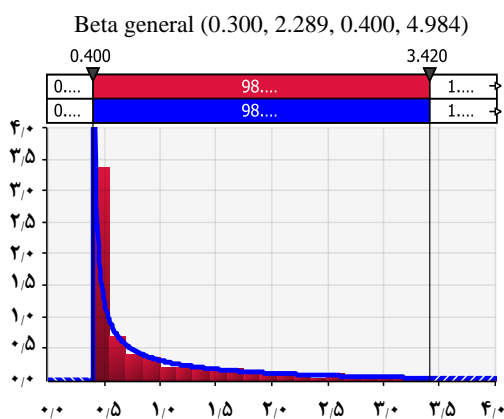
(B)



(C)



(D)



(E)

شکل ۹- هیستوگرام و تابع توزیع احتمال متغیرهای ورودی: (A) میزان pH، (B) نسبت سیانکس به دپا، (C) غلظت حلال، (D) زمان انجام فرایند، (E) غلظت اسید لاکتیک

جدول ۶ - نتیجه‌های شبیه‌سازی برای پارامترهای خروجی: ویژگی‌های آماری.

پارامتر خروجی	مقدار کمینه	مقدار بیشینه	میانگین	انحراف معیار	واریانس	چولگی	کشیدگی	میانه	مُد
E Dy	۷,۹۲۴۶	۹۹,۹۷۴۴	۸۶,۲۳۵۰	۱۶,۱۶۵۵	۲۶۱,۳۲۴۵	-۱,۸۳۷۳	۶,۵۶۴۵	۹۲,۷۱۹۳	۹۹,۶۵۳۸
E Gd	۰,۳۰۸۴	۹۹,۹۰۶۵	۶۸,۹۴۶۶	۲۸,۱۲۶۴	۷۹۱,۰۹۲۹	-۰,۹۶۳۰	۲,۷۷۰۵	۷۸,۸۰۰۷	۸۹,۳۶۹۲

جدول ۷ - نتیجه‌های شبیه‌سازی برای پارامترهای خروجی: تحلیل احتمالاتی.

پارامتر خروجی	%۵	%۱۵	%۲۵	%۳۵	%۴۵	%۵۰	%۵۵	%۶۵	%۷۵	%۸۵	%۹۵
E Dy	۵۲,۱۴	۶۹,۷۶	۸۰,۱۶	۸۷,۳۹	۹۱,۴۵	۹۲,۷۲	۹۳,۹۷	۹۵,۸۵	۹۷,۳۹	۹۸,۸۰	۹۹,۵۵
E Gd	۸,۸۰	۳۱,۴۴	۵۳,۰۵	۶۶,۲۸	۷۵,۷۴	۷۸,۸۰	۸۱,۶۹	۸۶,۶۸	۹۱,۲۹	۹۵,۱۴	۹۸,۵۹

جدول ۸ - نتیجه‌های شبیه‌سازی برای پارامترهای خروجی: تحلیل برازشی و همبستگی.

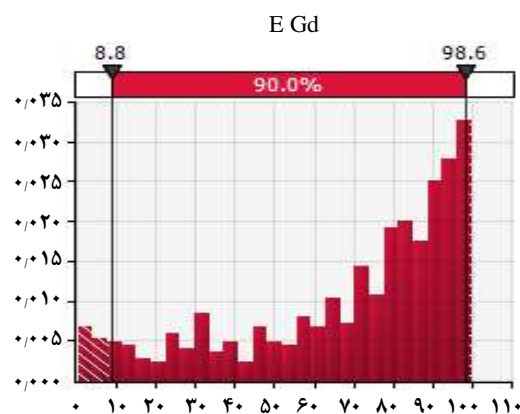
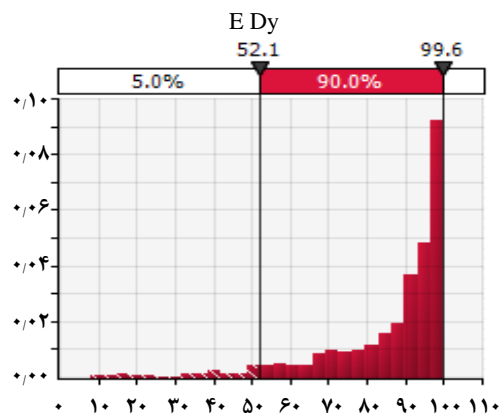
E Dy			E Gd			متغیرهای ورودی
ضریب همبستگی	ضریب برازش	رتبه	ضریب همبستگی	ضریب برازش	رتبه	
۰,۶۷۳	۰,۵۸۷	۱	۰,۷۲۸	۰,۷۱۷	۱	A
-۰,۱۰۸۱	-۰,۱۶۰	۳	-۰,۱۰۰۷	-۰,۱۰۸۸	۴	B
۰,۱۰۷۶	۰,۱۶۸	۲	۰,۱۰۴۳	۰,۱۰۰۶	۳	C
۰,۱۰۷۶	۰,۰۰۰	۴	-۰,۱۰۰۷	۰,۰۰۰	۵	D
۰,۱۰۳۲	۰,۰۰۰	۵	-۰,۱۱۳۲	-۰,۱۰۰۸	۲	E

در انجام آزمایش‌های گوناگون، احتمال این‌که درصد استخراج دیسپروسیم و گادولینیم به ترتیب مقداری برابر ۵۲/۱۴ و ۸/۸۰ درصد یا کم‌تر از آن‌ها باشد، تنها ۵ درصد است. همچنین با احتمال ۹۵ درصد می‌توان در انجام آزمایش‌های گوناگون به مقدارهای برابر ۹۹/۵۵ درصد و ۹۸/۵۹ درصد یا کم‌تر از آن‌ها به ترتیب برای E Dy و E Gy دست یافت و احتمال این‌که نتیجه‌های آزمایش‌های گوناگون، منجر به دستیابی مقدارهای بازبایی بین ۹۹/۵۵ تا ۹۸/۸۰ درصد برای E Dy و نیز ۹۵/۱۴ تا ۹۸/۵۹ درصد برای E Gy شود ۵ درصد می‌باشد. به عبارت دیگر عدم قطعیت دستیابی به بازبایی بیش از ۹۹/۵۵ درصد و ۹۸/۵۹ درصد به ترتیب برای E Dy و E Gy برابر ۵ درصد است.

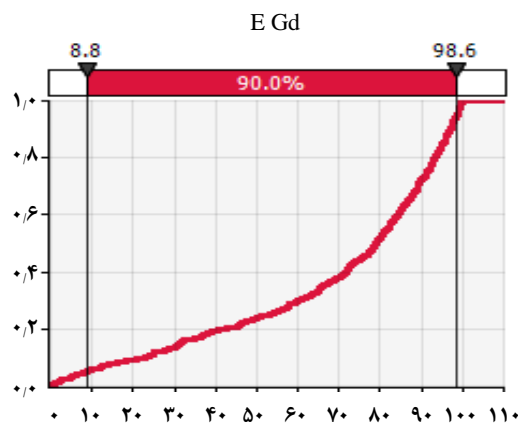
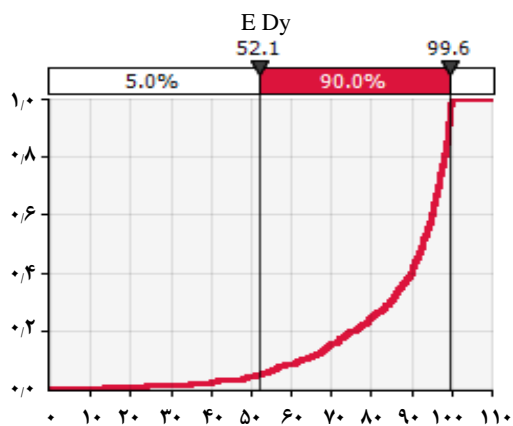
در شکل ۱۲ و جدول ۸ نتیجه‌های تحلیل برازش حساسیت (تورنادو) پس از انجام شبیه‌سازی، برای E Dy و E Gy آورده شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود پس از انجام شبیه‌سازی، تأثیرپذیری E Dy و E Gy نسبت به پارامترهای A و C مثبت است، به این معنی که افزایش هر کدام از این پارامترها

در این حالت (چولگی منفی)، انبوه مقدارهای پاسخ در سمت راست منحنی قرار می‌گیرند. بدین معنی که در این توزیع تعداد پاسخ‌های با مقدار پایین اندک است و بیش‌تر پاسخ‌ها مقدار بیش از میانگین دارند. همچنین می‌توان ادعا کرد که با انجام آزمایش‌ها گوناگون مقدارهای این پارامتر (E Dy) با سطح اطمینان ۹۰٪ بین ۵۲/۱۴ تا ۹۹/۶ درصد قرار دارند. همچنین میانگین درصد استخراج گادولینیم (E Gd) مطابق جدول ۶ برابر ۶۸/۹۴ درصد و انحراف معیار استاندارد، بیشینه و کمینه آن به ترتیب برابر ۲۸/۱۲، ۹۹/۹۰ و ۰/۳۰ درصد می‌باشد. مطابق شکل ۱۰ و جدول ۶ چولگی نمودار توزیع آن نیز منفی است و در نتیجه در این توزیع تعداد پاسخ‌های با مقدار پایین اندک است و بیش‌تر پاسخ‌ها مقدار بیش از میانگین دارند. همچنین می‌توان پیش‌بینی کرد که با انجام آزمایش‌های گوناگون مقدارهای این پارامتر (E Gy) با سطح اطمینان ۹۰٪ بین ۸/۸۰ درصد تا ۹۸/۶ درصد قرار دارد.

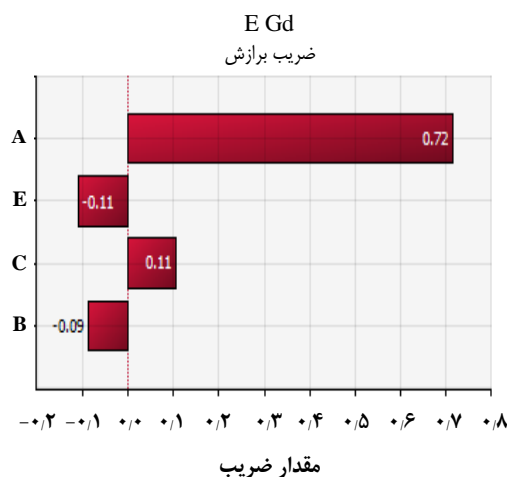
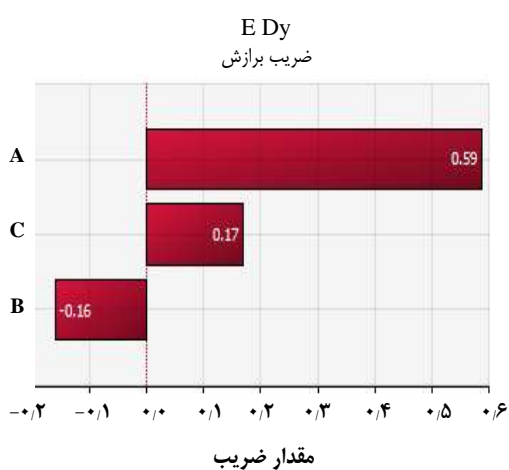
در شکل ۱۱ و جدول ۷ نتیجه‌های تحلیل احتمالاتی دو پارامتر E Dy و E Gy درج شده است. به عنوان نمونه مطابق این جدول



شکل ۱۰- نمودار هیستوگرام پارامترهای خروجی: (E Gd): درصد استخراج گادولینیم، (E Dy): درصد استخراج دیسپروسیم.



شکل ۱۱- تابع توزیع تجمعی پارامترهای خروجی: (E Gd): درصد استخراج گادولینیم، (E Dy): درصد استخراج دیسپروسیم.



شکل ۱۲- نمودار برازش حساسیت برای پارامترهای خروجی، (E Gd): درصد استخراج گادولینیم، (E Dy): درصد استخراج دیسپروسیم.

جدول ۹- سطح بهینه پیشنهادی برای جدایش تفریقی عناصر نادر و نتیجه‌های اعتبار سنجی و تحلیل عدم قطعیت مدل و آزمایش‌ها.

درصد‌های استخراج و احتمال وقوع				پارامترهای طراحی					آزمایش
Gd احتمال وقوع	E Gd	Dy احتمال وقوع	E Dy	E	D	C	B	A	
۱۵٫۷٪	۳۳٫۸۵	۳۴٫۲٪	۸۵٫۵۵	۰٫۴	۱۵	۰٫۱۵	۴	۱٫۱	پیش‌بینی مدل
۱۲٫۲٪	۲۷٫۴۲	۳۳٫۴٪	۸۵٫۲۳	۰٫۴	۱۵	۰٫۱۵	۴	۱٫۱	اعتبارسنجی مدل (شرایط آزمایشگاهی)
۳٫۵٪	۶٫۴۳	۰٫۸٪	۰٫۳۲	-	-	-	-	-	مقدار اختلاف

دستیابی به یک بازیابی ۸۵٫۵۵ درصدی برای دیسپروسیم در شرایط بهینه (۳۴٫۲ درصد) بیش از احتمال وقوع دستیابی به یک بازیابی ۳۳٫۸۵ درصدی برای گادولینیم تحت همان شرایط بهینه (۱۵٫۷ درصد) است، از این رو مقدار اختلاف بین شرایط آزمایشگاهی و مدل‌سازی دیسپروسیم (یعنی ۰٫۳۲ درصد) بسیار کمتر از مقدار اختلاف بین شرایط آزمایشگاهی و مدل‌سازی گادولینیم (یعنی ۶٫۴۳ درصد) می‌باشد. از این رو با توجه به وجود عامل‌های مؤثر در ایجاد عدم قطعیت‌های گوناگون با استفاده از رویکرد ارایه شده در این پژوهش می‌توان مدل‌سازی و ایجاد شرایط بهینه را به صورت واقع بینانه و علمی با در نظر گرفتن عدم قطعیت، تحلیل و بررسی کرد.

نتیجه‌گیری

به منظور مدل‌سازی عامل‌های مؤثر بر بهبود جدایش تفریقی دیسپروسیم و گادولینیم، فاکتورهای مهمی مانند pH، غلظت حلال‌های آلی، زمان انجام فرایند و غلظت لاکتیک اسید مؤثر هستند. در نتیجه برای بهینه‌سازی عامل‌های مؤثر بر بهبود جدایش، تعداد ۲۹ آزمایش توسط نرم افزار DX7 پیشنهاد شد. ولی از سویی در انجام آزمایش‌ها به طور معمول خطاهایی وجود دارند که می‌توانند منجر به ایجاد عدم قطعیت در محاسبه‌ها و نتیجه‌ها شوند. از این رو روش شبیه‌سازی مونت کارلو ابزار مناسبی برای تحلیل احتمالاتی به منظور مدل‌سازی در شرایط عدم قطعیت و آنالیز حساسیت در نتیجه‌های آزمایش‌های گوناگون می‌باشد. به منظور تحلیل مدل ریاضی درصد استخراج دیسپروسیم و درصد استخراج گادولینیم تحت شرایط عدم قطعیت از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، از نرم‌افزار @RISK در محیط اکسل استفاده شد. برای این منظور بر اساس داده‌های ۲۹ آزمایش انجام شده و رابطه‌های به دست آمده

باعث افزایش درصد بازیابی‌ها می‌شود. درحالی که تأثیرپذیری E Dy نسبت به پارامتر B، و تأثیرپذیری E Gy نسبت به پارامترهای E و B، منفی می‌باشد. از سویی حساسیت (میزان تأثیرپذیری) متغیرهای خروجی (E Dy و E Gy) نسبت به هر کدام از پارامترهای ورودی یکسان نبوده و مطابق این شکل بیش‌ترین میزان حساسیت مربوط به پارامتر A و کم‌ترین حساسیت مربوط به پارامتر B می‌باشد.

شرایط آزمایش بهینه پیشنهاد شده برای پارامترهای طراحی، به‌وسیله نرم افزار طراحی آزمایش نیز در جدول درج شده است و با انجام آزمایش، نتیجه‌های مدل اعتبار سنجی شده است. همچنین احتمال وقوع دستیابی به هر کدام از مقدارهای درصد استخراج دیسپروسیم و گادولینیم بر اساس نمودار توزیع تجمعی احتمالاتی (شکل ۱۱) درج شده است. بر این اساس در شرایط بهینه آزمایش، دستیابی به بازیابی ۸۵٫۵۵ درصدی با احتمال ۳۴٫۲ درصد مطابق مدل برازشی قابل پیش‌بینی است که انجام آزمایش دستیابی به بازیابی ۸۵٫۲۳ درصدی را فراهم کرده است. و این بدین معنی است که احتمال عدم دستیابی به بازیابی بیش از ۸۵٫۵۵ درصد برای دیسپروسیم، ۶۵٫۸ درصد است به عبارت دیگر، عدم قطعیت دستیابی به بازیابی بیش از ۸۵٫۵۵ درصد در شرایط بهینه، ۶۵٫۸ درصد است. همچنین برای دستیابی به مقدار بهینه درصد استخراج گادولینیم، دستیابی به بازیابی ۳۳٫۸۵ درصدی با احتمال ۱۵٫۷ درصد مطابق مدل برازشی قابل پیش‌بینی است که با انجام آزمایش، بازیابی ۲۷٫۴۲ درصدی به دست آمده است و این بدین معنی است که احتمال عدم دستیابی به بازیابی بیش از ۳۳٫۸۵ درصد برای گادولینیم، ۸۴٫۴ درصد است. در نتیجه مقایسه بین مقدارهای پیش‌بینی شده و واقعی برای درصد استخراج دیسپروسیم و گادولینیم نیز نشان می‌دهد که چون احتمال وقوع

بین متغیرهای ورودی و خروجی، ابتدا نوع و ویژگی‌های تابع توزیع احتمالی، هر کدام از پنج پارامتر مؤثر ورودی تعیین شد و بر اساس آن‌ها و با توجه به نتیجه‌های شبیه‌سازی، ویژگی‌های تابع توزیع پارامترهای خروجی (E Ga و E Dy) به دست آمد.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۲/۲۳ ؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۸/۸

مراجع

- [1] Haxel G.B., Hedrick J.B., Orris G.J., Stauffer P.H., Hendley J.W., [Rare Earth Elements Critical Resources for High Technology](#). *USGS Facts Sheet* 087-02, (2002).
- [2] Jorjani E., Bagherieh A.H., Rezai B., [Determination of Rare Earth Elements in Products of Chadormalu Iron ore Beneficiation Plant \(Iran\) from Beneficiation Point of View](#), *Iranian Journal of Chemistry and Chemical Engineering (IJCCE)*, **26**(4): 11-18 (2007).
- [3] Jia Q., Tong S., Li Z., Zhou W., Li H., Meng S., [Solvent Extraction of Rare Earth Elements with Mixtures of Sec-octylpHenoxy Acetic Acid and bis\(2,4,4-trimethylpentyl\) DithioHospHinic Acid](#), *Separation and Purification Technology*, **64**: 345-350 (2009).
- [4] Shanshan T., Xiaowei Z., Naizhong S., Qiong J., Weihong Z., Wuping L., [Solvent Extraction Study of Rare Earth Elements from Chloride Medium by Mixtures of Sec-nonylpHenoxy Acetic Acid with Cyanex301 or Cyanex302](#). *Hydrometallurgy*, **100**(1-2): 15-19 (2009).
- [5] Coleman H.W., Steele W.G., "Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers", John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999).
- [6] Christian j.T., Beacher G.B., "Reliability and Probability in Stability Analysis", ASCE, Geotechnical Spatial Publication, 1071-1111 (1992).
- [7] Sari M., Karpuz C., Ayday C., [Estimating Rock Mass Properties using Monte Carlo Simulation: Ankara Andesites](#), *Computers & Geosciences*, **36**(7): 959-969 (2010).
- [8] Fenton A., Griffiths D.V., [Bearing Capacity of Rough Rigid Strip Footing on Cohesive Soil, Probabilistic Study](#), *Journal of Geotechnical and Geo Environmented Engineering*, **128**(9): 743-755 (2002).
- [9] Ghaffari A., Hayati M., Shekholeslami A., [Probability and Sensitivity Analysis in Flotation Circuit of Bama Lead and Zinc Processing Plant Using Monte Carlo Simulation Method](#). *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review*, **33**(6): 416-426 (2012).
- [10] Mellado M.E., Gálvez E.D., Cisternas L.A., [Stochastic Analysis of Heap Leaching Process via Analytical Models](#), *Minerals Engineering*, **33**: 93-98 (2012).
- [11] Zou R., Lung W.S., Guo H., [Neural Network Embedded Monte Carlo Approach for Water Quality Modeling under Input Information Uncertainty](#), *Journal of Computing in Civil Engineering*, **16**(2): 135-142 (2002).
- [12] Salas J. D., Shin H.S., [Uncertainty Analysis of Reservoir Sedimentation](#), *Journal of Hydraulic Engineering*, **125**(4): 339-350 (1999).

- [13] El Safadi E.A., Adrot O., Flau J.M., [Advanced Monte Carlo Method for Model Uncertainty Propagation in Risk Assessment](#), *IFAC-Papers Online*, **48**(3): 529-534 (2015).
- [14] Ahammed M., Melchers R.E., [Gradient and Parameter Sensitivity Estimation for Systems Evaluated Using Monte Carlo Analysis](#), *Reliability Engineering and System Safety*, **91**(5): 594-601 (2006).
- [15] Cadini F., Sanctis J.D., Girotti T., Zio E, Luce A., Taglioni A., [Monte Carlo-Based Assessment of the Safety Performance of a Radioactive Waste Repository](#), *Reliability Engineering and System Safety*, **95**(8): 859-865 (2010).
- [16] Cadini F., Sanctis J.D., Bertoli I., Zio E., [Monte Carlo Simulation of Radionuclide Migration in Fractured Rock for the Performance Assessment of Radioactive Waste Repositories](#), *Reliability Engineering and System Safety*, 111: 241-247 (2013).
- [17] Cadini F., Gioletta A., [A Bayesian Monte Carlo-Based Algorithm for the Estimation of Small Failure Probabilities of Systems Affected by Uncertainties](#), *Reliability Engineering and System Safety*, **153**: 15-27 (2016).
- [18] Dehghani H., Ataee-pour M., Esfahanipour A., [Evaluation of the Mining Projects under Economic Uncertainties Using Multi Dimensional Binomial Tree](#), *Resources Policy*, **39**(1): 124-133 (2014).
- [19] Robert C.P., Casella. G., "[Monte Carlo Statistical Methods](#)", 2nd ed. Springer-Verlag, New York, (2004).
- [20] Wills B.A., "[Mineral Processing Technology](#)", 7th ed. Elsevier, Oxford, (2006).